HAL open science

Points de petite hauteur en géométrie diophantienne

Aurélien Galateau

▶ To cite this version:

Aurélien Galateau. Points de petite hauteur en géométrie diophantienne. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne - Franche Comté, 2016. tel-02292193

HAL Id: tel-02292193

https://univ-fcomte.hal.science/tel-02292193

Submitted on 19 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Mémoire d'Habilitation

Présenté par

Aurélien Galateau

Points de petite hauteur en géométrie diophantienne

Soutenu le 2 décembre 2016 devant le jury composé de :

Francesco Amoroso	Professeur, Université de Caen (rapporteur)
Huayi Chen	Professeur, Université Paris 7
Éric Gaudron	Professeur, Université de Clermont-Ferrand
Philipp Habegger	Professeur, Universität Basel (rapporteur)
Marc Hindry	Professeur, Université Paris 7
Federico Pellarin	Professeur, Université de Saint-Étienne
Martín Sombra	Professeur, Universitat de Barcelona (rapporteur, excusé)

Remerciements

Ce mémoire présente mes travaux de recherche depuis la fin de ma thèse il y a neuf ans. Pendant cette période, j'ai pu compter sur l'aide de mes différentes institutions d'accueil et de nombreux collègues mathématiciens.

Je souhaite d'abord remercier l'Institut de Mathématiques de Bâle, et en particulier David Masser dont j'ai été l'assistant entre 2007 et 2009. J'ai bénéficié les deux années suivantes d'une bourse post-doctorale au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, dans la compagnie stimulante d'Emmanuel Breuillard et Emmanuel Ullmo. Depuis 2011, je suis maître de conférences au Laboratoire de Mathématiques de Besançon. J'y ai rejoint l'équipe d'Algèbre et Théorie des Nombres dont je salue les membres avec gratitude. C'est un plaisir d'enseigner et de faire des mathématiques dans cet environnement bienveillant où on peut toujours compter sur le soutien des collègues, qu'ils soient mathématiciens, informaticiens ou techniciens administratifs. Ces cinq dernières années, dans le cadre d'un détachement au CNRS, j'ai fait de nombreux séjours de recherche au Laboratoire Poncelet à Moscou, où Elizaveta Kryukova et Michael Tsfasman m'ont offert des conditions de travail idéales. Mes remerciements vont aussi au BICMR de Pékin, à l'IMPA de Rio et à l'ESI de Vienne.

Francesco Amoroso, Philipp Habegger et Martín Sombra ont accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire. Je m'en réjouis d'autant plus que certains de leurs travaux ont été une source d'inspiration importante pour les résultats qui sont exposés ici. Je suis également reconnaissant à Huayi Chen, Éric Gaudron, Marc Hindry et Federico Pellarin d'avoir accepté de compléter le jury. Depuis mes premiers pas dans la recherche, j'ai souvent pu profiter de leurs conseils, de leurs encouragements et de leurs lumières mathématiques.

Je tiens à remercier Sinnou David, qui n'a jamais cessé depuis plus de dix ans de me communiquer ses intuitions et son magnifique enthousiasme. Un grand merci également à Antoine Chambert-Loir pour son énergie contagieuse et à Gaël Rémond pour son jugement infaillible.

La recherche en mathématiques est une activité collective, et les travaux décrits ici ont grandement bénéficié de conversations avec mes collègues, collaborateurs et amis mathématiciens, parmi lesquels : Cécile Armana, Jean-Robert Belliard, Vincent Bosser, Alberto Cámara, Sara Checcoli, Agnès David, Christophe Delaunay, Philippe Lebacque, Francesco Lemma, Valéry Mahé, César Martínez, Amilcar Pacheco, Fabien Pazuki, Martin Widmer. Un salut amical enfin aux compagnons de route avec qui je partage l'aventure mathématique : David Cohen, Adrien Deloro, Benjamin Girard, Anne-Sophie Kaloghiros, Pierre-Yves Le Gall, Vésale Nicolas, Florent Schaffhauser, Alexey Zykin. Et à tous mes proches pour leur soutien indéfectible.

Introduction

La géométrie diophantienne est l'étude des solutions entières ou rationnelles de systèmes d'équations polynomiales à l'aide des concepts et des techniques de la géométrie algébrique. Celle-ci, et en particulier sa formulation moderne dans la théorie des schémas développée par Grothendieck à partir des années 50, donne une interprétation géométrique des systèmes d'équations algébriques. Elle leur associe également un certain nombre d'invariants à partir desquels elle entreprend de les classifier.

Le but ultime de la géométrie diophantienne est d'énumérer les solutions des problèmes diophantiens en fonction de leurs invariants géométriques. Ce programme très ambitieux est encore loin de son terme, y compris dans le cadre relativement simple des courbes algébriques. L'outil central dans sa mise en œuvre est la théorie des hauteurs développée à la suite des travaux de Weil sur les points rationnels des jacobiennes, qui quantifie la « complexité arithmétique » des solutions d'un problème diophantien. La propriété de Northcott permet alors de les dénombrer si on sait borner leur hauteur en fonction des invariants géométriques du problème.

Les recherches sur les petites valeurs de la hauteur trouvent leur origine dans l'étude de la mesure de Mahler d'un polynôme, qui donne des indications sur la répartition de ses racines dans le plan complexe. On peut d'abord essayer de minorer précisément la hauteur dès lors qu'elle ne s'annule pas. Cette question spécifiquement « arithmétique » se situe dans le prolongement d'un célèbre problème encore non résolu posé par Lehmer au début des années 30. Il existe aussi des estimations de nature plus « géométrique » où on quantifie la rareté des points algébriques de petite hauteur de certains objets géométriques, dans la lignée d'une conjecture sur les courbes formulée par Bogomolov au début des années 80.

Les estimations géométriques sur les points de petite hauteur jouent un rôle important dans l'obtention via la méthode de Vojta de bornes explicites précises sur le nombre de points rationnels des courbes, et sur leur distribution dans des objets de dimension supérieure. Elles sont également utilisées, en concurrence avec les estimations arithmétiques, pour donner des résultats qualitatifs en direction d'une conjecture de Pink et de Zilber, qui étend dans une large mesure la conjecture de Manin-Mumford et trouve sa formulation la plus générale dans le cadre des variétés de Shimura mixtes (comprenant notamment les tores, les variétés abéliennes et leurs espaces de modules).

Les travaux résumés dans ce mémoire contribuent à la connaissance des points de petite hauteur dans différents contextes de la géométrie diophantienne : les variétés abéliennes, les corps de nombres et les modules de Drinfeld. Mes recherches ont d'abord porté sur une version précise du théorème d'Ullmo et de Zhang résolvant la conjecture de Bogomolov, puis elles ont évolué vers des questions de nature plus arithmétique concernant les différentes variantes du problème de Lehmer. J'ai pris le temps de me confronter à ces sujets classiques pour approfondir ma connaissance du domaine, avant de m'orienter progressivement vers les objets modulaires qui sont au centre des recherches actuelles.

Les chemins pris pour étudier les points de petite hauteur suivent le plus souvent un schéma façonné par Liouville au milieu du XIXe siècle et qui, sans cesse perfectionné depuis, a permis de démontrer de nombreux résultats d'approximation diophantienne ou de transcendance. L'analyse p-adique joue ici un rôle privilégié : elle permet de traduire sous une forme métrique des résultats profonds de la théorie algébrique des nombres, afin d'extrapoler les propriétés d'annulation de polynômes auxiliaires construits grâce à un lemme de Siegel.

On peut dans certains cas estimer la hauteur plus directement en la décomposant en une somme de contributions locales qu'on étudie séparément. Il faut pour cela disposer d'informations p-adiques particulièrement fortes, ou encore les consolider artificiellement à l'aide d'un procédé d'« accélération p-adique » ou d'un théorème d'équidistribution.

Le premier chapitre est consacré à des estimations géométriques pour la hauteur canonique construite par Néron et Tate sur les variétés abéliennes. Dans la foulée des résultats de ma thèse, je donne une forme « effective » de la conjecture de Bogomolov pour les sous-variétés d'une variété abélienne, sous une conjecture de Serre concernant ses places de réduction ordinaire. Dans le cas des hypersurfaces, j'obtiens un résultat inconditionnel en compensant la perte d'information p-adique par une propriété algébrique locale.

Le second chapitre rassemble des résultats impliquant hauteurs et courbes elliptiques. On donne d'abord une réponse positive au problème de Lehmer elliptique dans le cas galoisien, ainsi qu'une minoration de la hauteur canonique sur les puissances d'une courbe elliptique, qui découlent tous deux d'un théorème de comptage prouvé par Masser à la fin des années 80. On s'intéresse ensuite aux corps engendrés par une infinité d'invariants modulaires associés à des courbes elliptiques à multiplications complexes, et on montre que certains de ces corps satisfont la propriété (B) introduite par Bombieri et Zannier pour étudier la version relative du problème de Lehmer sur les corps de nombres.

Le troisième chapitre traite de la hauteur canonique introduite par Denis sur les modules de Drinfeld. Le contexte est celui des corps de fonctions de dimension 1, ce qui exclut d'emblée toute implication géométrique. On montre d'abord l'analogue d'un résultat de Habegger portant sur les corps engendrés par la torsion d'un module de Drinfeld de rang 2 non exceptionnel. Puis on décrit quelques résultats nouveaux au sujet du pendant drinfeldien de la conjecture de Lehmer. Celle-ci est vérifiée dans le cas des extensions purement inséparables pour les modules admettant une place

supersingulière. Sans hypothèse sur le point considéré, il est possible de donner une borne à la Dobrowolski pour les modules à multiplications complexes, et une borne polynomiale pour les modules quelconques.

Les travaux présentés ici suivent l'ordre chronologique approximatif de leur réalisation. Chacun des trois chapitres est autonome. Il commence avec une liste des articles décrits, et se termine par une bibliographie séparée précédée d'une brève discussion des perspectives ouvertes par ces recherches.

Chapitre 1

Minorations géométriques sur les variétés abéliennes

Les travaux décrits dans ce chapitre se situent dans le prolongement de ma thèse. Ils visent à établir une forme « effective » de la conjecture de Bogomolov démontrée par Ullmo à la fin des années 90. Cette version effective s'applique à une conjecture formulée indépendamment par Pink et Zilber, et qui décrit l'intersection d'une variété plongée dans une variété abélienne avec ses sous-groupes algébriques de codimension suffisamment grande.

Travaux présentés

[**1**] « Minoration du minimum essentiel sur les variétés abéliennes », *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), 775-812.

[**2**] « Un théorème de zéros dans les groupes algébriques commutatifs », *Publ. Math. Besançon* **1** (2014), 35-44.

[**3**] « Petits points des hypersurfaces d'une variété abélienne », *Int. Math. Res. Not.* **2** (2012), 339-359.

---

1. Le problème de Bogomolov effectif

Les questions qui m'ont intéressé au cours de ma thèse et dans les années qui ont suivi trouvent leur origine dans une conjecture formulée par Bogomolov [**Bog80**]. Celle-ci affirme la discrétion de la métrique induite par la hauteur de Néron-Tate sur une courbe algébrique de genre au moins 2.

Démontrée par Ullmo [**Ull98**], la conjecture de Bogomolov a été rapidement généralisée par Zhang [**Zha98**] aux sous-variétés des variétés abéliennes. Sous sa formulation la plus classique, le théorème de Zhang montre le caractère sporadique des points de petite hauteur canonique dans une sous-variété, à condition que celle-ci ne soit pas « de torsion », c'est-à-dire qu'elle ne soit pas une composante d'un sous-groupe algébrique de la variété abélienne dans laquelle elle est plongée. Il fournit

également une nouvelle preuve de la conjecture de Manin-Mumford démontrée par Raynaud [**Ray83**] quinze ans plus tôt.

Peu après, David et Philippon [**DP99**] ont donné une version explicite du théorème de Zhang, en minorant le minimum essentiel des sous-variétés qui ne sont pas de torsion. Comme l'avaient prévu Bombieri et Zannier [**BZ96**], leur résultat est uniforme : si la sous-variété n'est pas le translaté d'une variété de torsion, son minimum essentiel est minoré uniquement en fonction de son degré et de la variété abélienne ambiante.

Les estimations de David et Philippon étaient loin d'être optimales, et ils ont eux-mêmes formulé un peu plus tard des conjectures précises à ce sujet (voir [**DP07**]). L'amélioration des bornes n'a pas tardé à devenir un enjeu important. Rémond [**Rém00**] a d'abord montré comment utiliser la minoration du minimum essentiel pour donner une version explicite de la conjecture de Mordell démontrée par Faltings [**Fal83**]. Il est apparu qu'une optimisation de la borne de David et Philippon en la hauteur de Faltings de la variété ambiante (telle qu'ils l'ont établie pour les puissances de courbes elliptiques dans [**DP07**]) permettait d'éliminer cette hauteur de la borne sur le nombre de points rationnels d'une courbe algébrique de genre supérieur à 2.

À la suite des résultats précurseurs de Bombieri, Masser et Zannier [**BMZ99**], un nouveau champ d'application s'est ouvert pour ce type d'estimation « géométrique ». Selon la voie explorée par Habegger et Viada, une minoration précise (et « quasi-optimale ») du minimum essentiel en le degré de la sous-variété permet de donner une réponse positive à une conjecture formulée indépendamment par Zilber [**Zil02**] et par Pink [**Pin05**] dans le cas des courbes plongées dans une variété abélienne, et qui a depuis été démontrée par Habegger et Pila [**HP16**].

Conjecture 1.1 (Pink, Zilber). *Soient A une variété abélienne et C une courbe tracée dans A. Si C n'est pas incluse dans un sous-groupe algébrique strict de A, il y a un nombre fini de points de C qui appartiennent à un sous-groupe algébrique de A de codimension au moins* 2.

Remarquons que cet énoncé renforce la conjecture de Manin-Mumford pour les courbes considérées, et qu'il s'y réduit si la variété ambiante est simple. C'est lorsque celle-ci a beaucoup de facteurs simples que la conjecture de Pink et Zilber prend tout son sens. On renvoie à Chambert-Loir [**CL12**] pour plus de détails sur ce problème.

2. Résultats pour les variétés banales

Les techniques développées dans ma thèse permettaient essentiellement de prouver une forme « effective » de la conjecture de Bogomolov, sous une conjecture de Serre concernant les places de réduction ordinaire d'une variété abélienne. Elles étaient inspirées par l'approche d'Amoroso et David [**AD03**] sur l'analogue torique, et reposaient en grande partie sur les propriétés p-adiques des points de torsion des variétés abéliennes, qui peuvent s'interpréter de façon galoisienne via la théorie de Raynaud [**Ray74**] ou en passant par les groupes formels.

Seuls les cas de petite codimension avaient été traités dans ma thèse, l'obstruction pour la codimension quelconque provenant de l'absence dans le cas général d'un relèvement du Frobenius en caractéristique nulle. Ce défaut rendait particulièrement

délicate la phase dite de « descente » qui clôt le schéma de preuve utilisé ici. J'ai commencé par développer une combinatoire spécifique, et en l'associant à l'approche « équivariante » introduite par Amoroso [**Amo07**] dans l'étude du cas torique, j'ai pu achever ce travail.

Commençons par donner quelques précisions sur le minimum essentiel. Introduit par Szpiro, il peut s'interpréter comme une mesure de la hauteur d'une variété, qui permet de quantifier précisément la répartition de ses points de petite hauteur. On se donne une variété abélienne A de dimension g définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, plongée dans un espace projectif et munie de la hauteur de Néron-Tate associée qu'on notera $\hat{h}$.

Définition 1.2. *Soit V une sous-variété de A. Le minimum essentiel de V, noté $\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$, est l'infimum des réels h tels que $\{P \in V(\bar{\mathbb{Q}})\ ,\ \hat{h}(P) \leq h\}$ est Zariski-dense dans V.*

Le théorème de Zhang décrit précisément les sous-variétés de A pour lesquelles le minimum essentiel s'annule : ce sont les translatés d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.

On fixe désormais un corps de nombres K sur lequel A est définie. Rappelons qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ de caractéristique résiduelle p est dit ordinaire si A est de bonne réduction en $\mathfrak{p}$, et si le groupe de p-torsion sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ de la variété réduite est de rang maximal (égal à g). Suivant Chambert-Loir [**CL12**], on dit que A est « banale » si ses premiers ordinaires ont une densité naturelle égale à 1 (quitte à étendre le corps de définition). Serre conjecture que toute variété abélienne définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ est banale ; c'est notamment le cas des produits arbitraires de courbes elliptiques, de surfaces abéliennes et de variétés CM. Dans [**1**], j'obtiens le résultat « quasi-optimal » suivant :

Théorème 1.3. *Supposons que A soit banale. Si V n'est pas incluse dans le translaté d'une sous-variété abélienne stricte de A :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \gg_A \frac{1}{\deg(V)^{\frac{1}{\operatorname{codim}(V)}} \log\left(2\deg(V)\right)^{g^{8g}}}.$$

Le symbole $\gg_A$ signifie que l'inégalité est vraie à condition de multiplier le membre de droite par un réel strictement positif dépendant de A. Le facteur logarithmique devrait conjecturalement disparaître. Il est inhérent à la méthode diophantienne et sans importance dans les applications.

En utilisant cette estimation et le théorème de « hauteur bornée » de Habegger [**Hab09**], Viada [**Via10**] donne une réponse à la conjecture 1.1 dans le cas des variétés banales.

Corollaire 1.4 (Viada). *Si A est banale, toute courbe de A qui n'est pas incluse dans un sous-groupe algébrique strict admet un nombre fini de points appartenant à un sous-groupe algébrique de codimension au moins 2.*

En suivant des chemins similaires, Checcoli, Veneziano et Viada ([**CVV14**] puis [**CVV16**]) ont obtenu des extensions partielles de ce résultat à la dimension supérieure.

La preuve du théorème 1.3 procède selon un schéma classique d'approximation diophantienne, dont une étape clé consiste habituellement à relier le degré d'un

fermé algébrique à celui d'un polynôme d'interpolation en utilisant un « lemme de zéros ».

Amoroso et David [**AD03**] avaient annoncé une version très générale de ce résultat, valable dans le cadre des groupes algébriques commutatifs et recourant au formalisme des « dessous d'escaliers » pour prendre en charge la question des multiplicités. Ils en avaient donné une démonstration dans le cas torique sans multiplicité, suffisant pour les applications qu'ils avaient en vue.

Dans [**2**], je donne une preuve de ce lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, inspirée de travaux classiques de Philippon qui mélangent algèbre commutative, théorie de l'intersection et des outils combinatoires assez fins.

On peut notamment en déduire l'estimation suivante, qui est utilisée au cours de la preuve du théorème 1.3 ([**1**, Lemme 4.3]).

Proposition 1.5. *Supposons que Z soit un fermé algébrique de A incomplètement défini par des polynômes de degré au plus L. On a l'inégalité :*

$$\deg(Z) \ll_A L^{\operatorname{codim}(Z)}.$$

Notons que c'est la stratégie équivariante d'Amoroso qui permet de se ramener à cette version simple découlant d'un théorème de Philippon [**Phi86**, Proposition 3.3]. Pour une utilisation de la forme plus sophistiquée démontrée dans [**2**], on renvoie à [**Gal10**, Théorème 6.1].

3. Le cas des hypersurfaces

Il était naturel à ce stade de pousser un peu plus les méthodes connues pour obtenir une minoration inconditionnelle, celle-ci entraînant immédiatement une preuve complète de la conjecture 1.1.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ et p désigne sa caractéristique résiduelle, la principalité locale de l'idéal de définition d'une hypersurface permet de faire contribuer collectivement les points d'un sous-groupe de p-torsion de A dans le schéma diophantien. On peut alors se contenter de propriétés p-adiques plus faibles que dans le cas ordinaire, mais valables pour presque tout $\mathfrak{p}$. Dans [**3**], j'obtiens ainsi le théorème suivant.

Théorème 1.6. *Soit V une hypersurface de A qui n'est pas le translaté d'une sous-variété abélienne. On a :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \gg_A \frac{1}{\deg(V)\log\left(2\deg(V)\right)^{2g}}.$$

Le cœur de mon approche du problème de Bogomolov est d'utiliser les propriétés de ramification de la p-torsion d'une variété abélienne pour un nombre premier p bien choisi, puis d'en déduire que la variété V est « proche $\mathfrak{p}$-adiquement » de ses translatés par certains points de p-torsion (où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier divisant p). Si le minimum essentiel de V est trop petit, ceci permet d'extrapoler les propriétés d'annulation d'un polynôme d'interpolation de V construit grâce à un lemme de Siegel, et d'arriver à une contradiction en comptant les composantes irréductibles de son lieu d'annulation.

Dans le cas où $\mathfrak{p}$ est une place de réduction ordinaire, les estimations obtenues en examinant la structure de schéma en groupe associée au groupe de p-torsion $A[p]$ (donnée par exemple dans Mumford [**Mum74**, III]) sont particulièrement favorables. Elles sont même analogues à la situation torique, pour peu qu'on se restreigne au sous-groupe $G_{\mathfrak{p}}$ de $A[p]$ annulé modulo $\mathfrak{p}$. Pour leur donner corps, fixons un système de paramètres $(t_1, \ldots, t_g)$ au voisinage de 0 (le neutre de A). Si $P \in G_{\mathfrak{p}}$ est dans l'ouvert de définition du système de paramètres, on a ([**Gal10**, Corollaire 2.9]) :

$$\forall v \mid \mathfrak{p},\ \forall\, 1 \leq i \leq g :\ |t_i(P)|_v \leq p^{-\frac{1}{p-1}},$$

où v est une place d'une extension finie de K sur laquelle P est défini.

Lorsque le p-rang chute, les propriétés de ramification de la p-torsion se dégradent fortement. Un théorème classique d'Ogus permet toutefois d'éviter l'annulation du p-rang pour un ensemble de premiers $\mathcal{P}_A$ de densité 1. En s'appuyant sur les propriétés locales fines de la structure de schéma en groupe de la p-torsion, on peut alors construire un sous-groupe non nul $H_{\mathfrak{p}}$ de $A[p]$ (pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$), qui vérifie même des estimations encore plus fortes à condition de considérer un système « tordu » de paramètres $(t_{1,\mathfrak{p}}, \ldots, t_{g,\mathfrak{p}})$. Si $P \in H_{\mathfrak{p}}$ et $v \mid \mathfrak{p}$ dans un corps de définition de P ([**3**, Proposition 3.6]) :

$$|t_{1,\mathfrak{p}}(P)|_v \leq p^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad \forall\, 2 \leq i \leq g : |t_{i,\mathfrak{p}}(P)|_v \leq p^{-1}.$$

Mais dès qu'on se restreint à un sous-groupe strict de $G_{\mathfrak{p}}$, la machine diophantienne se « grippe » et le gain dans l'extrapolation reste bloqué au niveau de l'interpolation.

En examinant avec soin les propriétés du groupe formel de la variété abélienne en caractéristique p, on peut aussi donner des estimations plus faibles mais inconditionnelles, qui s'avèrent décisives ici ([**3**, Proposition 3.1]).

Lemme 1.7. *Soit α le p-rang de la réduction de A modulo $\mathfrak{p}$ et $P \in G_{\mathfrak{p}}$ dans l'ouvert de définition de $(t_1, \ldots, t_g)$. On a :*

$$\forall v \mid \mathfrak{p},\ \forall\, 1 \leq i \leq g : |t_i(P)|_v \leq p^{-\frac{1}{p^{g-\alpha+1}}}.$$

L'idée diophantienne qui permet d'exploiter au mieux ces propriétés est la suivante : on interpole directement sur le translaté de la variété de départ par un certain $G_{\mathfrak{p}}$; puis en utilisant la formule de Leibniz, on extrapole à un ordre plus grand qui serait même théoriquement infini sans certaines complications techniques liées à l'arithmétique et à la géométrie des variétés abéliennes.

Cette stratégie repose sur la principalité locale de l'idéal de définition d'une hypersurface (le caractère local de cette propriété étant d'ailleurs insuffisamment souligné dans [**3**]). Celle-ci permet de factoriser la section d'interpolation dans un quotient adéquat, et finalement de rassembler les contributions isolées des différents éléments de $G_{\mathfrak{p}}$.

J'ai ensuite essayé d'étendre la validité de ce théorème à la codimension quelconque, en utilisant des suites régulières d'interpolation et des outils de la théorie de l'intersection arithmétique. Mais les bornes classiques d'interpolation géométrique, et surtout arithmétique, telles qu'on peut les déduire par exemple des travaux de Chardin et Philippon [**CP99**], sont inopérantes dans cette situation. Elles s'adaptent

notamment assez mal aux fermés fortement réductibles qui apparaissent dans le schéma diophantien.

La démonstration récente par Habegger et Pila de la conjecture 1.1 a largement modifié la donne sur ces questions. Ils ont montré qu'en utilisant l'o-minimalité, on pouvait se contenter d'une minoration « arithmétique » de la hauteur (comme celle que fournit le théorème classique de Masser [**Mas86**]) bien éloignée de ce que prédit l'analogue du problème de Lehmer sur les variétés abéliennes. Dans ce contexte, la résolution inconditionnelle du problème de Bogomolov effectif est devenue moins urgente.

4. Perspectives

L'analogue torique du problème de Bogomolov a rebondi avec la contribution d'Amoroso et Viada [**AV09**], qui ont grandement simplifié l'approche diophantienne usuelle en associant à la majoration classique (par Chardin [**Cha88**]) de la fonction de Hilbert géométrique une minoration plus spécifique (dûe à Chardin et Philippon [**CP99**]). Une autre idée importante apparaissant en filigrane dans leur travail est que les techniques de transcendance permettent de majorer « gratuitement » le degré d'une hypersurface contenant les points de petite hauteur dans la conjecture de Bogomolov.

J'ai essayé sans succès d'adapter leur nouveau point de vue aux variétés abéliennes, et je me suis convaincu que celui-ci n'avait essentiellement aucune incidence sur la situation métrique ($\mathfrak{p}$-adique), qui est pour l'instant le facteur limitant dans le cadre abélien.

Ces idées pourraient cependant féconder des questions connexes, comme le laisse espérer le travail récent de Martínez-Metzmeier [**MM15**] qui borne la torsion des sous-variétés des tores. Son résultat améliore significativement les estimations existantes, en particulier celles qui sont issues des derniers résultats sur la conjecture de Bogomolov. Nous cherchons maintenant à transposer son théorème aux variétés abéliennes, en combinant l'approche de Serre et Hindry sur la conjecture de Manin-Mumford, les idées introduites par Beukers et Smyth [**BS01**] dans le cas des courbes du tore, et la double estimation des fonctions de Hilbert suivant la voie inaugurée par Amoroso et Viada.

Dans ce contexte, il serait précieux de disposer d'une version totalement explicite du théorème de Serre sur les homothéties dans la représentation galoisienne associée à la torsion d'une variété abélienne. Avec A. David, nous essayons désormais de préciser les constantes dans la preuve complète que Wintenberger [**Win02**] a donnée de ce théorème.

Bibliographie

[AD03] F. Amoroso & S. David – « Minoration de la hauteur normalisée dans un tore », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 3, p. 335–381.

[Amo07] F. Amoroso – « Bogomolov on tori revisited », *Prépublication* (2007).

[AV09] F. Amoroso & E. Viada – « Small points on subvarieties of a torus », *Duke Math. J.* **150** (2009), no. 3, p. 407–442.

[BMZ99] E. Bombieri, D. Masser & U. Zannier – « Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups », *Internat. Math. Res. Notices* **20** (1999), p. 1119–1140.

[Bog80] F. Bogomolov – « Points of finite order on abelian varieties », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), no. 4, p. 782–804.

[BS01] F. Beukers & C. Smyth – « Cyclotomic points on curves », *Millenial Conference on Number Theory, May 21-26, 2000, Urbana Champaign. AK Peters.* (2001).

[BZ96] E. Bombieri & U. Zannier – « Heights of algebraic points on suvarieties of abelian varieties », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **23** (1996), no. 4, p. 779–792.

[Cha88] M. Chardin – « Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique », *Bull. Soc. Math. France* **117** (1988), p. 305–318.

[CL12] A. Chambert-Loir – « Relations de dépendance et intersections exceptionnelles », *Séminaire Bourbaki, Astérisque* **348** (2012), p. 149–188.

[CP99] M. Chardin & P. Philippon – « Régularité et interpolation », *J. Algebraic Geom.* **8** (1999), p. 471–481.

[CVV14] S. Checcoli, P. Veneziano & E. Viada – « On torsion anomalous intersections », *Rend. Lincei Mat. Appl.* **1** (2014), no. 25, p. 1–36.

[CVV16] ———, « Some explicit cases of the torsion anomalous conjecture », *À paraître aux Trans. Amer. Math. Soc.* (2016).

[DP99] S. David & P. Philippon – « Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **28** (1999), no. 3, p. 489–543.

[DP07] ———, « Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des puissances de courbes elliptiques », *Internat. Math. Res. Papers* (2007).

[Fal83] G. Faltings – « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlenkörpern. », *Invent. Math.* **73** (1983), p. 349–366.

[Gal10] A. Galateau – « Le problème de Bogomolov effectif sur les variétés abéliennes », *Algebra Number Theory* **4** (2010), no. 5, p. 547–598.

[Hab09] P. Habegger – « Intersecting subvarieties of abelian varieties with algebraic subgroups of complementary dimension », *Invent. Math.* **176** (2009), no. 2, p. 405–447.

[HP16] P. Habegger & J. Pila – « O-minimality and certain anomalous intersections », *À paraître aux Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2016).

[Mas86] D. Masser – « Letter to D. Bertrand », (1986).

[MM15] C. Martìnez-Metzmeier – « The number of maximal torsion cosets in subvarieties of tori », *Prépublication* (2015).

[Mum74] D. Mumford – *Abelian Varieties*, Tata Lecture Notes. Cambridge University Press, 1974.

[Phi86] P. Philippon – « Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs », *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), p. 353–383.

[Pin05] R. Pink – « A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford and Mordell-Lang », *Prépublication* (2005).

[Ray74] M. Raynaud – « Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ », *Bull. Soc. Math. France* **2** (1974), p. 241–280.

[Ray83] _____, « Courbes sur une variété abélienne et points de torsion », *Invent. Math.* **71** (1983), p. 207–233.

[Rém00] G. Rémond – « Décompte dans une conjecture de Lang », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 3, p. 513–545.

[Ull98] E. Ullmo – « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes », *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 167–179.

[Via10] E. Viada – « Lower bounds for the normalized height and non-dense subsets of subvarieties of abelian varieties », *Int. J. Number Theory* **6** (2010), no. 3, p. 471–499.

[Win02] J.-P. Wintenberger – « Démonstration d'une conjecture de Lang dans des cas particuliers », *J. reine angew. Math.* **553** (2002), p. 1–16.

[Zha98] S. Zhang – « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 159–165.

[Zil02] B. Zilber – « Exponential sums equations and the Schanuel conjecture », *J. London Math. Soc.* **65** (2002), no. 1, p. 27–44.

Chapitre 2

Problèmes de hauteur et courbes elliptiques

Les questions abordées ici concernent des minorations « arithmétiques » de hauteurs en lien avec les courbes elliptiques. On présente d'abord des résultats concernant la hauteur de Néron-Tate sur les courbes elliptiques et leurs produits, en direction du problème de Lehmer sur les variétés abéliennes. On explique ensuite comment la théorie des courbes elliptiques à multiplication complexe permet de construire des extensions infinies de $\mathbb{Q}$ avec une structure galoisienne compliquée, sur lesquelles la hauteur de Weil vérifie la propriété (B) introduite par Bombieri et Zannier.

Travaux présentés

[**4**] « Some consequences of Masser's counting theorem on elliptic curves », à paraître au *Math. Z.*, 18 pages. En collaboration avec V. Mahé.

[**5**] « Small height in fields generated by singular moduli », *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 2771-2786.

---

1. Le problème de Lehmer sur les variétés abéliennes

Les recherches sur les points de petite hauteur trouvent leur origine dans une question posée par Lehmer [**Leh33**] à propos de la mesure de Mahler des nombres algébriques non cyclotomiques. Reformulé en termes plus modernes, le problème de Lehmer revient à minorer de façon optimale en fonction de son degré la hauteur de Weil d'un nombre algébrique qui n'est pas une racine de l'unité. Cette question n'est toujours pas entièrement résolue, malgré quelques avancées notoires (parmi lesquelles Smyth [**Smy71**], ou plus récemment Borwein, Dobrowolski et Mossinghoff [**BDM07**]). Dobrowolski [**Dob79**] s'est rapproché de la borne conjecturée à un facteur logarithmique près, ce facteur d'erreur étant sans conséquence dans les nombreuses applications de son théorème.

On fixe désormais une variété abélienne A de dimension g, définie sur un corps de nombres K et plongée dans un espace projectif. Si $P \in A(\bar{K})$ est d'ordre infini, on peut aussi chercher une minoration optimale de sa hauteur de Néron-Tate $\hat{h}(P)$. L'analogue du problème de Lehmer dans les variétés abéliennes peut se formuler de la façon suivante.

Conjecture 2.1. *Si P est de degré $d := [K(P) : K]$ et n'a aucun multiple dans une sous-variété abélienne stricte :*

$$\hat{h}(P) \gg_A \frac{1}{d^{\frac{1}{g}}}.$$

Lorsque la variété est à multiplication complexe (CM), David et Hindry [**DH00**] montrent que cette borne est vraie à un facteur logarithmique près. Leur théorème est l'analogue de l'estimation de Dobrowolski sur les nombres algébriques et il généralise un résultat de Laurent [**Lau83**] sur les courbes elliptiques. Le schéma général de la preuve est identique : il repose sur l'existence d'un relèvement du Frobenius dans l'anneau des endomorphismes en caractéristique nulle, pour une quantité suffisante d'idéaux premiers. Mais sans hypothèse sur la variété abélienne, cette propriété n'est plus garantie et les meilleurs résultats connus sont encore très éloignés de la borne espérée, ce qui a notamment pour effet de limiter l'attaque via Lehmer de la conjecture de Pink et Zilber.

L'approche la plus efficace à ce jour pour minorer la hauteur de Néron-Tate d'une variété abélienne sans CM est un théorème de Masser (la lettre non publiée [**Mas86**] pour le cas général, et [**Mas89**] pour les courbes elliptiques), qui compte le nombre de points, définis sur un corps de nombres fixé, dont la hauteur est majorée par une borne « de type Lehmer ». Il en déduit immédiatement une minoration de la hauteur de Néron-Tate.

Théorème 2.2 (Masser). *Si $P \in A(\bar{K})$ est d'ordre infini et de degré d, on a l'inégalité suivante :*

$$\hat{h}(P) \gg_A \frac{1}{d^{2g+1}\log(2d)^{2g}}.$$

Le théorème de comptage donne également des informations très utiles sur la torsion des variétés abéliennes.

Avec Mahé, nous avons d'abord cherché à minorer la hauteur de Néron-Tate par voie diophantienne directe en utilisant les propriétés du polynôme caractéristique de l'endomorphisme de Frobenius. Notre stratégie produit des résultats, au moins en dimension 1, mais ceux-ci sont un peu plus faibles que la borne de Masser. Comme on le verra plus bas, la même approche permet d'obtenir une borne polynomiale pour la hauteur canonique d'un module de Drinfeld en rang quelconque.

2. Le cas des extensions galoisiennes

Impressionnés par la robustesse du théorème de Masser, nous avons essayé de l'utiliser pour minorer la hauteur dans certaines situations particulières, en particulier celle des extensions galoisiennes. La question analogue sur les corps de nombres a été traitée par Amoroso et David [**AD99**] comme corollaire d'une généralisation à la dimension quelconque du théorème de Dobrowolski.

Dans le cadre des variétés abéliennes, la pertinence de ce point de vue est limitée au cas CM, pour lequel la borne de Dobrowolski est connue. Dans [**4**], suivant les idées d'Amoroso et David, nous avons d'abord combiné le théorème de comptage de Masser et des calculs de volume pour la métrique euclidienne induite par la hauteur de Néron-Tate, afin de minorer la hauteur sur les puissances d'une courbe elliptique E.

THÉORÈME 2.3. *Si $P \in E^g(\bar{K})$ est de degré d et n'a aucun multiple dans une sous-variété abélienne stricte :*

$$\hat{h}(P) \gg_{E,g} \frac{1}{d^{1+\frac{2}{g}} \log(2d)^{\frac{2}{g}}}.$$

Ceci permet de s'approcher à « une puissance ε près » de la borne de Lehmer dans le cas galoisien sur E. Une utilisation plus directe du comptage de Masser donne un résultat un peu meilleur, où le facteur d'erreur est logarithmique.

Pour faire disparaître ce facteur d'erreur, nous avons mis en place une nouvelle méthode où le comptage de Masser est combiné avec des bornes issues des travaux de Serre sur les représentations galoisiennes associées à la torsion des courbes elliptiques. Le principal résultat de [**4**] est le suivant.

THÉORÈME 2.4. *Soit $P \in E(\bar{K})$ d'ordre infini tel que l'extension $K(P)/K$ est galoisienne de degré d. On a :*

$$\hat{h}(P) \gg_E \frac{1}{d}.$$

Le cas CM se traite comme pour les corps de nombres. Le théorème de David et Hindry fournit une minoration plus forte dès qu'il existe deux conjugués de P linéairement indépendants sur $\mathrm{End}(E)$. Si cela n'est pas le cas, une descente kummerienne et la borne « relative » de Ratazzi [**Rat04**] permettent de conclure. Les techniques employées ici donnent même naturellement l'inégalité plus fine suivante, pour tout $\varepsilon > 0$ et sous les hypothèses du théorème 2.4 :

$$\hat{h}(P) \gg_{E,\varepsilon} \frac{1}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Dans le cas non CM, le théorème de l'image ouverte de Serre [**Ser72**] borne efficacement l'ordre d'un point de torsion défini sur une extension galoisienne de K en fonction de son degré. Ceci suffit à estimer la partie kummerienne de l'extension. La partie restante étant « écrasée » grâce au comptage de Masser, on peut assez vite conclure avec le théorème 2.2.

Comme sur les corps de nombres, il est possible de pousser un peu les méthodes pour obtenir une minoration « de type Lehmer » lorsque le degré de la clôture galoisienne de $K(P)/K$ est majoré par une puissance fixe de d, mais cette puissance doit rester strictement inférieure à 2 dans le cas non CM.

3. La propriété (B)

Si le problème de Lehmer est toujours ouvert sur les corps de nombres comme sur les variétés abéliennes, on sait qu'il est possible dans certaines configurations de donner une minoration beaucoup plus forte de la hauteur.

Schinzel [**Sch73**] a été le premier à mettre ce phénomène en évidence, en minorant par une constante absolue la hauteur de Weil d'un nombre algébrique non cyclotomique et totalement réel. Amoroso et Dvornicich [**AD00**] ont ensuite montré un résultat du même ordre sur la clôture abélienne $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{Q}$, qui a vite été étendu par Amoroso et Zannier [**AZ00**] à la clôture abélienne K^{ab} d'un corps de nombres K quelconque. Ces derniers auteurs ont également formulé une version « relative » de la conjecture de Lehmer, où le degré absolu est remplacé par le degré relatif sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$, et dont on peut démontrer des formes faibles particulièrement utiles (notamment en direction de la conjecture de Pink et Zilber).

Bombieri et Zannier [**BZ01**] ont lancé l'étude systématique de ces corps en posant la définition suivante.

Définition 2.5. *On dit qu'une extension K de $\mathbb{Q}$ vérifie la propriété de Bogomolov, ou propriété (B), s'il existe $c(K) > 0$ telle que :*

$$\forall x \in K \setminus \mu_\infty : \quad h(x) \geq c(K).$$

Les corps de nombres satisfont la propriété (B) en vertu du « théorème de Northcott. » Bombieri et Zannier donnent également un analogue ultramétrique du théorème de Schinzel pour les corps à degré local uniformément borné au-dessus d'un nombre premier fixé. Checcoli [**Che13**] a depuis montré que leur théorème s'applique notamment aux extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$ dont le groupe de Galois est d'exposant fini.

Récemment, Amoroso, David et Zannier [**ADZ14**] ont unifié le cas abélien et le critère de Checcoli, en traitant le cas des extensions galoisiennes d'un corps de nombres dont le groupe de Galois est d'exposant fini sur son centre. Ils ont aussi proposé des conjectures à peine plus ambitieuses, mais qui semblent encore hors de portée avec les techniques actuelles.

La propriété (B) ne se limite pas à ce type de configuration galoisienne. Habegger [**Hab13**] a ainsi prouvé que le corps engendré par la torsion d'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ satisfait la propriété (B). La structure galoisienne de ce corps peut être précisée grâce au théorème de l'image ouverte de Serre [**Ser72**], et elle sort du cadre traité dans [**ADZ14**] pourvu que E ne soit pas de type CM.

L'exemple le plus simple en dehors du champ exploré par Amoroso, David et Zannier est le suivant. On considère une famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de corps quadratiques deux-à-deux distincts, et pour tout n, on se donne une extension abélienne L_n de K_n.

Question 2.6. *Le compositum des $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie-t-il la propriété (B) ?*

D'après Bombieri et Zannier [**BZ01**], on sait que le « théorème de Northcott » s'applique au compositum des $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui a donc la propriété (B).

4. Corps engendrés par une famille d'invariants singuliers

On peut expliciter la question précédente en considérant, pour tout premier p, le corps quadratique imaginaire $K_p := \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ et son corps de classe de Hilbert $L_p := K_p(j_p)$, où j_p est l'invariant modulaire d'une courbe elliptique ayant multiplication complexe par l'anneau des entiers de K_p.

Dans [**5**], je montre que de nombreux sous-corps du compositum des $(L_p)_{p\in\mathcal{P}}$ vérifient la propriété (B).

THÉORÈME 2.7. *Pour tout premier $q \geq 3$, il existe un ensemble $\mathcal{P}_q$ de densité (de Dirichlet) $\frac{1}{4}$ tel que le compositum $L_{\mathcal{P}_q}$ des $(L_p)_{p\in\mathcal{P}_q}$ a la propriété (B).*

Les $\mathcal{P}_q$ sont largement distincts, dans le sens où, pour deux premiers $q \neq q'$, l'ensemble $\mathcal{P}_q \cap \mathcal{P}_{q'}$ est de densité $\frac{1}{8}$.

La preuve de ce théorème est basée sur la théorie du corps de classe, selon laquelle les premiers inertes d'un corps de nombres sont totalement décomposés dans son corps de Hilbert. Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet permet d'affirmer que l'ensemble $\mathcal{P}_q$ des premiers p tels que q soit inerte dans K_p est de densité au moins $\frac{1}{4}$. On se retrouve alors dans la situation étudiée par Bombieri et Zannier avec un degré local borné, et il est possible de minorer la hauteur de façon totalement explicite :

$$\forall x \in L_{\mathcal{P}_q} \setminus \mu_\infty : \quad h(x) \geq \frac{\log\left(\frac{q}{2}\right)}{q^2+1}.$$

Ces méthodes semblent toutefois impuissantes à décrire la situation dès qu'on considère des premiers totalement décomposés dans les K_p (donnant lieu à la réduction ordinaire des courbes elliptiques CM associées).

Si les corps construits ici ont une structure locale contrôlée en un certain nombre premier, ils sortent du cadre galoisien décrit dans [**ADZ14**]. En combinant le théorème de Kronecker-Weber et un résultat de Pappalardi [**Pap95**] sur l'exposant du groupe de classe d'un corps quadratique imaginaire, je montre qu'ils sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$ avec un groupe de Galois d'exposant infini sur son centre.

La même méthode fonctionne avec des familles de corps de Hilbert de corps quadratiques réels (ou encore avec des familles mixtes). Cet exemple est peut-être moins intéressant dans notre contexte, car si on se fie à l'heuristique de Cohen-Lenstra [**CL84**], le nombre de classe des corps quadratiques réels est statistiquement beaucoup plus petit que celui des corps quadratiques imaginaires.

Plus généralement, si on considère une famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le degré est uniformément borné sur $\mathbb{Q}$, dont les discriminants sont premiers entre eux deux-à-deux et qui ont un nombre premier inerte en commun, le compositum de leurs corps de Hilbert vérifie la propriété (B). En me basant sur des travaux de Louboutin [**Lou01**], j'ai construit une famille infinie de « corps cubiques simples » soumise à ces contraintes. En notant L le compositum des corps de classe de Hilbert, j'obtiens la minoration suivante :

$$\forall x \in L \setminus \mu_\infty : \quad h(x) \geq \frac{\log(2)}{18}.$$

Il est également possible ici, en particulier sous GRH, de quantifier précisément la complexité du groupe de Galois de l'extension galoisienne $L/\mathbb{Q}$.

5. Perspectives

L'amélioration du théorème 2.2, qui était ma motivation première, est un défi qui ne pourra probablement pas être relevé sans idées nouvelles.

Un prolongement naturel de [**4**] serait l'étude du problème de Lehmer sur les variétés abéliennes dans le cas galoisien. La stratégie mise en place pour les courbes elliptiques devrait donner des résultats en dimension plus grande, en associant le théorème annoncé dans [**Mas86**] à des estimations classiques sur la torsion des variétés abéliennes, telles qu'elles sont par exemples présentées dans [**HR12**]. Il serait à ce sujet intéressant de revisiter le théorème de comptage de Masser, et d'en chercher une variante comptant les points dont la hauteur passe sous une borne de l'ordre de celle de la conjecture 2.1.

Très récemment, Amoroso et Masser [**AM16**] ont annoncé une nouvelle minoration bien plus forte que celle de [**AD99**] pour les nombres algébriques engendrant une extension galoisienne. La preuve utilise une version relative du théorème de Dobrowolski en dimension supérieure, démontrée par Delsinne [**Del09**] et dont l'équivalent existe sur les variétés abéliennes CM.

Au sujet de la propriété (B), de nombreux problèmes restent encore ouverts. Par exemple, comment étendre le théorème d'Habegger [**Hab13**] aux courbes elliptiques définies sur un corps de nombres quelconque, ou mieux, à une variété abélienne quelconque ? Le premier problème est déjà épineux. En l'attente d'une généralisation du théorème d'Elkies [**Elk87**] sur les premiers supersinguliers, il suppose de mettre en place une stratégie métrique valable pour un premier p de réduction ordinaire alors que les éléments de Frobenius ne disposent pas de propriétés de commutation évidentes dans le groupe de Galois associé à la p-torsion.

Mon travail sur les invariants modulaires était surtout conçu comme une transition vers des problèmes concernant les points spéciaux des variétés de Shimura. Alors que les idées de Pila et Zannier ont permis la résolution de la conjecture d'André-Oort dans un grand nombre de cas, on peut chercher à obtenir des bornes effectives dans le prolongement du résultat de Kühne [**Küh12**]. Je réfléchis à une approche diophantienne de ces questions basée sur les propriétés des invariants singuliers.

Avec Lebacque et Tsfasman, nous nous intéressons aux liens entre la propriété (B) et les empilements de sphère dans la lignée de [**RT90**]. La construction de familles de réseaux « asymptotiquement denses », passe par une minoration forte de la hauteur sur des corps peu ramifiés de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$.

Bibliographie

[AD99] F. Amoroso & S. David – « Le problème de Lehmer en dimension supérieure », *J. reine angew. Math.* **513** (1999), p. 145–179.

[AD00] F. Amoroso & R. Dvornicich – « A lower bound for the height in abelian extensions », *J. Number Theory* **80** (2000), p. 260–272.

[ADZ14] F. Amoroso, S. David & U. Zannier – « On fields with the Property (B) », *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 6, p. 1893–1910.

[AM16] F. Amoroso & D. Masser – « Lower bounds for the height in Galois extensions », *Prépublication* (2016).

[AZ00] F. Amoroso & U. Zannier – « A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **29** (2000), no. 4, p. 711–727.

[BDM07] P. Borwein, E. Dobrowolski & M. Mossinghoff – « Lehmer's problem for polynomials with odd coefficients », *Ann. of Math.* **166** (2007), p. 347–366.

[BZ01] E. Bombieri & U. Zannier – « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Rend. Mat. Acc. Lincei* **12** (2001), no. 9, p. 5–14.

[Che13] S. Checcoli – « Fields of algebraic numbers with bounded local degrees and their properties », *Trans. Amer. Math. Soc.* (2013), no. 365, p. 2223–2240.

[CL84] H. Cohen & H. Lenstra – « Heuristics on class groups of number fields », *Lecture Notes in Math.* **1068** (1984), p. 33–62.

[Del09] E. Delsinne – « Le problème de Lehmer relatif en dimension supérieure », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **42** (2009), no. 6, p. 981–1028.

[DH00] S. David & M. Hindry – « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C.M. », *J. reine angew. Math.* **529** (2000), p. 1–74.

[Dob79] E. Dobrowolski – « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial », *Acta Arith.* **34** (1979), p. 391–401.

[Elk87] N. Elkies – « The existence of infinitely many supersingular primes for every elliptic curve over $\mathbb{Q}$ », *Invent. Math.* **89** (1987), p. 561–567.

[Hab13] P. Habegger – « Small height and infinite nonabelian extensions », *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 11, p. 2027–2076.

[HR12] M. Hindry & N. Ratazzi – « Points de torsion sur les variétés abéliennes de type GS_p », *J. Inst. Math. Jussieu* **11** (2012), no. 1, p. 27–65.

[Küh12] L. Kühne – « An effective result of André-Oort type », *Ann. of Math.* **176** (2012), no. 1.

[Lau83] M. Laurent – « Minoration de la hauteur de Néron-Tate », *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1981-1982, Progr. Math.* **38** (1983), p. 137–152.

[Leh33] D. H. Lehmer – « Factorization of certain cyclotomic functions », *Ann. of Math.* **34** (1933), p. 461–479.

[Lou01] S. Louboutin – « The exponent three class group problem for some real cyclic cubic number fields », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2001), no. 2, p. 353–361.

[Mas86] D. Masser – « Letter to D. Bertrand », (1986).

[Mas89] ———, « Counting points of small height on elliptic curves », *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), p. 247–265.

[Pap95] F. Pappalardi – « On the exponent of the ideal class group of $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 3, p. 663–671.

[Rat04] N. Ratazzi – « Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe », *Internat. Math. Res. Notices* **58** (2004), p. 3122–3152.

[RT90] M. Rosenbloom & M. Tsfasman – « Multiplicative lattices in global fields », *Invent. Math.* **101** (1990), p. 687–696.

[Sch73] A. Schinzel – « On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number », *Acta Arith.* **24** (1973), p. 385–399.

[Ser72] J. P. Serre – « Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques », *Invent. Math.* **15** (1972), p. 259–331.

[Smy71] C. Smyth – « On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer », *Bull. Lond. Math. Soc.* **3** (1971), p. 169–175.

Chapitre 3

Petite hauteur canonique sur les modules de Drinfeld

Les résultats de ce chapitre concernent pour l'essentiel les petites valeurs de la hauteur canonique sur les modules de Drinfeld. On montre d'abord que le corps engendré par la torsion des modules de Drinfeld « non exceptionnels » de rang 2 vérifie la propriété (B) pour la hauteur canonique associée (ainsi que pour la hauteur de Weil), en appliquant la stratégie développée par Habegger sur les courbes elliptiques. On donne ensuite des résultats partiels en direction du problème de Lehmer sur les modules de Drinfeld, concernant les extensions inséparables. On explique finalement comment minorer la hauteur canonique, à la Dobrowolski dans le cas CM, et de façon polynomiale dans le cas non CM.

Travaux présentés

[**6**] « Hauteur et torsion des modules de Drinfeld de rang 2 », soumis en juillet 2015, 28 pages. En collaboration avec A. Pacheco.

[**7**] « Lower bounds for the canonical height on Drinfeld modules », soumis en juin 2016, 24 pages. En collaboration avec V. Bosser.

---

1. Présentation

De nombreuses facettes de la théorie des modules de Drinfeld révèlent une analogie partielle entre ces objets et les variétés abéliennes. Celle-ci vaut surtout d'un point de vue arithmétique, dans la mesure où les modules de Drinfeld classiques sont des objets de dimension 1. Denis [**Den92**] a ainsi construit une « hauteur canonique » pour laquelle il a démontré un certain nombre de propriétés comparables à celles de la hauteur de Néron-Tate. Poonen [**Poo95**] a ensuite défini des hauteurs locales avec lesquelles il a pu prouver l'analogue du théorème de Mordell-Weil dans le cadre drinfeldien.

Il est facile de se convaincre que la minoration de Lehmer est vérifiée pour la hauteur de Weil sur un corps de fonctions. Le problème est beaucoup plus difficile si on considère la hauteur canonique $\hat{h}_\phi$ associée à un module de Drinfeld ϕ, mais on

peut raisonnablement formuler le pendant drinfeldien de la conjecture de Lehmer. Fixons un corps de fonctions K en une variable sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

Conjecture 3.1. *Si $x \in \bar{K}$ est d'ordre infini pour ϕ et de degré $d := [K(x) : K]$:*

$$\hat{h}_\phi(x) \gg_\phi \frac{1}{d}.$$

Le premier résultat significatif en direction de cette conjecture est dû à Denis [**Den92**], qui démontre l'analogue du théorème de Dobrowolski pour les extensions séparables dans le module de Carlitz $\mathcal{C}$.

Théorème 3.2 (Denis). *Si $x \in \bar{K}$ est d'ordre infini pour $\mathcal{C}$ et tel que $K(x)/K$ soit séparable de degré d :*

$$\hat{h}_{\mathcal{C}}(x) \gg_{\mathcal{C}} \frac{1}{d \log(2d)^3}.$$

Son théorème a été partiellement généralisé par Demangos [**Dem15**] aux modules CM. Pour les modules généraux, Ghioca [**Ghi07**] donne une minoration polynomiale de la hauteur canonique moyennant une hypothèse de positivité de la hauteur locale associée à une place non archimédienne.

On peut également trouver des sous-corps de $\bar{K}$ sur lesquels la hauteur canonique $\hat{h}_\phi$ associée à un module ϕ est minorée par un nombre réel strictement positif lorsqu'elle ne s'annule pas. On dit que de tels corps satisfont la propriété (B_ϕ).

Un premier exemple a été produit par David et Pacheco [**DP08**], qui ont démontré que la clôture abélienne K^{ab} de K vérifie (B_ϕ) pour tout ϕ. Dans le cas CM, leur théorème a ensuite été amélioré par Bauchère [**Bau15**] qui a établi l'analogue du résultat principal de [**ADZ14**], traitant notamment les extensions galoisiennes dont le groupe de Galois est d'exposant fini sur son centre.

2. Torsion des modules de Drinfeld non exceptionnels de rang 2

Avec Pacheco, nous avons cherché des exemples de corps vérifiant la propriété (B_ϕ) au-delà de ceux envisagés par Amoroso, David et Zannier (et étudiés par Bauchère dans le cas CM). À la suite du travail d'Habegger [**Hab13**], nous nous sommes penchés sur le corps K_{tors} engendré par la $\bar{K}$-torsion d'un module de Drinfeld ϕ défini sur K.

Le module de Carlitz et les modules CM de rang 2 étant déjà couverts par le résultat principal de [**DP08**], nous nous sommes concentrés sur les modules de Drinfeld de rang 2 sans CM. Dans ce cadre, la distribution des premiers supersinguliers a été étudiée par Brown [**Bro92**] puis précisée par C. David [**Dav95**].

Soit ϕ un module de Drinfeld de rang 2, donné par l'action suivante sur la variable t :

$$\phi_t := t + g\tau + \Delta\tau^2,$$

où τ est le q-Frobenius sur K et $(g, \Delta) \in K \times K^*$. Le j-invariant de ϕ est défini par la formule : $j(\phi) := g^{q+1}/\Delta$, et il caractérise la classe de $\bar{K}$-isomorphisme de ϕ.

Définition 3.3. *On dit que ϕ est exceptionnel si $tj(\phi)$ est un carré dans $\mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$.*

Le résultat principal de [**Bro92**] est l'analogue du théorème d'Elkies pour les modules non exceptionnels de caractéristique $\neq 2$. Il nous permet de démontrer dans [**6**] le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. *Si ϕ est un module de rang 2 non exceptionnel en caractéristique $\neq 2$, le corps K_{tors} engendré par la $\bar{K}$-torsion de ϕ satisfait la propriété* (B_ϕ).

Nous prouvons également une minoration absolue de la hauteur de Weil pour les éléments non constants de K_{tors}.

La preuve de ces résultats est basée sur la stratégie de [**Hab13**]. Pour les modules non exceptionnels, le théorème de Brown assure l'existence d'un premier supersingulier de degré suffisamment grand. Les propriétés galoisiennes des modules de Tate en un tel premier (et notamment la théorie de Lubin-Tate) permettent d'obtenir une estimation métrique très forte, puis d'en déduire une minoration absolue pour la hauteur canonique. Le cas « ramifié » donne lieu à des complications techniques qui sont résolues par l'analogue du théorème de l'image ouverte et des arguments de la théorie des groupes linéaires sur les corps finis.

L'absence de places archimédiennes permet de se passer du théorème d'équidistribution utilisé par Habegger dans l'étude de la hauteur de Weil. On y parvient aussi pour la hauteur canonique grâce à un procédé d'« accélération $\mathfrak{p}$-adique » en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ qu'on a choisi.

Poonen [**Poo98**] a montré que les modules de Drinfeld n'admettent pas toujours des premiers supersinguliers, ce qui crée un contraste important avec la conjecture de Lang et Trotter sur les courbes elliptiques. L'extension de ces bornes à la torsion des modules exceptionnels passe donc par l'analyse des premiers ordinaires, la première difficulté à résoudre apparaissant dans le cas « non ramifié » pour estimer la taille de la classe d'un élément de Frobenius dans le groupe de Galois considéré.

Au delà des résultats obtenus, ce travail m'a permis de me familiariser avec la technicité des modules de Drinfeld, mais aussi d'étudier en détail la preuve d'Habegger et de mesurer les obstacles empêchant pour l'instant sa généralisation.

3. Le problème de Lehmer pour les extensions inséparables

Les résultats connus à l'heure actuelle en direction de la conjecture 3.1 sont plus faibles que ceux dont on dispose sur les corps de nombres et sur les courbes elliptiques. Avec Armana et Bosser, nous avons commencé à travailler ensemble afin de réduire cet écart.

Une première limite concerne les extensions inséparables, sur lesquelles le théorème principal de [**Den92**] ne dit rien. Dans son travail sur les modules CM, Demangos parvient à exploiter leur spécificité dans un schéma diophantien. Sa borne pour la hauteur canonique est polynomiale en le degré inséparable (sous une hypothèse concernant la densité des premiers supersinguliers).

Un premier résultat de [**7**] inverse la perspective : pour les extension purement inséparables, nous obtenons sur certains modules une borne meilleure que pour les extensions séparables, au niveau prédit par la conjecture 3.1. Notre minoration sur le module de Carlitz $\mathcal{C}$ prend la forme suivante.

THÉORÈME 3.5. *Si $x \in \bar{K}$ est tel que $K(x)/K$ soit purement inséparable de degré d :*

$$\hat{h}_{\mathcal{C}}(x) \geq \frac{q^{-6}}{d}.$$

En examinant d'un peu plus près la constante de comparaison entre hauteur de Weil et hauteur canonique donnée dans [**Den95**], il est possible de remplacer q^{-6} par $(4q)^{-2}$ dans cette inégalité.

Nous montrons aussi une estimation de la même force pour les extensions inséparables sur un module de Drinfeld ϕ qui admet au moins un premier supersingulier $\mathfrak{p}$. La constante est là encore totalement explicite ; elle dépend du degré de $\mathfrak{p}$, ainsi que du rang de ϕ, de sa hauteur et du degré d'un corps de définition. Remarquons une nouvelle fois qu'en vertu de [**Poo98**], l'existence d'un premier supersingulier n'est pas toujours garantie. Elle est notamment réalisée pour le module de Carlitz, pour les modules de rang 2 non exceptionnels et pour les modules CM définis sur une extension cyclique de k.

La preuve de ce théorème pour le module de Carlitz repose sur la forme très particulière que prend la décomposition des idéaux premiers dans les extensions purement inséparables : ceux-ci sont toujours totalement ramifiés. La trivialité de l'extension résiduelle en le premier $\mathfrak{p} := (t)$ et la forme simple de la loi du module de Carlitz donnent lieu à une première information $\mathfrak{p}$-adique, qui est ensuite exploitée par un procédé d'accélération $\mathfrak{p}$-adique. Si ϕ admet un premier supersingulier $\mathfrak{p}$, on peut encore en déduire une estimation $\mathfrak{p}$-adique suffisamment forte grâce aux propriétés du morphisme de Frobenius modulo $\mathfrak{p}$.

En l'absence d'un premier supersingulier, la même méthode produit une borne plus faible mais polynomiale pour les extensions purement inséparables. On peut également obtenir des résultats pour les extensions quelconques, où la borne décroît exponentiellement avec le degré séparable. Les techniques mises en œuvre ici « se recollent mal » avec celles utilisées par Denis et Demangos, ce qui empêche pour l'instant de démontrer l'exact pendant du théorème de Dobrowolski sur le module de Carlitz.

4. Minorations de la hauteur avec et sans CM

Nous nous sommes ensuite penchés sur les modules CM, pour lesquels Demangos a obtenu des résultats encourageants en direction de la conjecture 3.1. Dans [**7**], nous démontrons une variante de son théorème où les exposants sont améliorés et l'hypothèse sur la densité des premiers supersinguliers est retirée.

THÉORÈME 3.6. *Soit ϕ un module CM de rang r. Pour tout $x \in \bar{K}$ de degré d et degré inséparable d_{i} qui n'est pas de torsion pour ϕ :*

$$\hat{h}_{\phi}(x) \gg_{\phi} \frac{1}{d\big(d_{\mathrm{i}} \log(2d)\big)^{2r+1}}.$$

La principale spécificité de notre travail est l'utilisation d'un relèvement du morphisme de Frobenius en caractéristique générique, pour une quantité suffisante d'idéaux premiers. Ce fait est garanti par la théorie de Hayes (qui est par exemple

présentée dans [**Hay92**] et [**Hay79**]), qui relie la multiplication complexe à la théorie du corps de classe des corps CM.

Le schéma de la preuve est pour le reste semblable à celui de [**Dem15**], qui combine un lemme de Siegel absolu sur les corps de fonctions, une extrapolation basée sur des estimations $\mathfrak{p}$-adiques et un lemme de zéros. Contrairement à Demangos, nous n'avons pas cherché à spécifier la dépendance en ϕ de la constante apparaissant dans le théorème 3.6.

La dernière étape de notre programme était d'obtenir une borne polynomiale en toute généralité, ce dont Ghioca s'est approché dans [**Ghi07**]. Nous obtenons la minoration suivante, valable pour un module de Drinfeld ϕ quelconque de rang $r \geq 1$.

Théorème 3.7. *Pour tout $x \in \bar{K}$ de degré d qui n'est pas de torsion pour ϕ :*

$$\hat{h}_\phi(x) \gg_\phi \frac{1}{d^{4r^2+5}}.$$

Notre résultat est en fait légèrement plus précis, faisant apparaître le degré inséparable et un facteur logarithmique en le degré.

La démonstration de ce théorème se fonde une nouvelle fois sur un schéma d'approximation diophantienne, dont la première étape est le lemme de Siegel absolu déjà appliqué dans le cas CM. L'extrapolation reflète des propriétés $\mathfrak{p}$-adiques liées à l'annulation du polynome caractéristique $P_\mathfrak{p}$ du morphisme de Frobenius sur la réduction de ϕ modulo $\mathfrak{p}$. Ces propriétés sont plus faibles que celles retenues dans le cas CM, ce qui explique la différence entres la borne obtenue ici et celle du théorème 3.6.

Le comptage final des racines du polynôme auxiliaire est assez délicat. Il s'effectue en intégrant dans un principe de tiroirs des résultats classiques sur les racines de $P_\mathfrak{p}$ (l'analogue dans le cadre drinfeldien des « conjectures de Weil »). Remarquons que la comparaison entre coefficients et racines de $P_\mathfrak{p}$ est bien meilleure dans un contexte ultramétrique, et que le principe de tiroirs fonctionne car on travaille sur un objet de dimension 1. Ces deux faits sont notamment pris en défaut si on se place dans le cadre d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres.

5. Perspectives

La suite du programme de recherche lancé avec Armana et Bosser concerne le théorème de comptage de Masser [**Mas86**], que nous souhaitons adapter aux modules de Drinfeld afin d'améliorer la borne donnée par le théorème 3.7. Le comptage de Masser a déjà été transposé aux corps de nombres dans [**LM04**], ce qui indique que le défaut de compacité des modules de Drinfeld ne devrait pas être ici un obstacle insurmontable.

Un tel résultat pourrait aussi offrir un angle d'attaque pour le problème de Lehmer dans le cas galoisien, suivant les lignes de [**4**]. Dans le cadre du module de Carlitz ou des modules CM, on peut aussi envisager de passer par des estimations en dimension supérieure. Un analogue partiel de [**AD00**] pour les modules de dimension 2 a déjà été établi dans [**Dio02**].

Il serait également intéressant de chercher des avatars du critère de Deuring pour les modules de Drinfeld de rang quelconque, vu le rôle important joué par les premiers supersinguliers dans les questions d'approximation diophantienne. Il est possible de s'inspirer ici de résultats démontrés récemment dans les variétés abéliennes (voir [**Bla14**] et [**Sug13**]).

Bibliographie

[AD00] F. Amoroso & S. David – « Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces », *Acta Arith.* **92** (2000), no. 4, p. 340–366.

[ADZ14] F. Amoroso, S. David & U. Zannier – « On fields with the Property (B) », *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 6, p. 1893–1910.

[Bau15] H. Bauchère – « Minoration de la hauteur canonique pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes », *J. Number Theory* **157** (2015), p. 291–328.

[Bla14] C. Blake – « A Deuring criterion for abelian varieties », *Bull. London Math. Soc.* **46** (2014), no. 6, p. 1256–1263.

[Bro92] M. Brown – « Singular moduli and supersingular moduli of Drinfeld modules », *Invent. Math.* **110** (1992), p. 419–439.

[Dav95] C. David – « Supersingular reduction of Drinfeld modules », *Duke Math. J.* **78** (1995), p. 399–411.

[Dem15] L. Demangos – « Lehmer problem and Drinfeld modules », *Prépublication* (2015), p. 52 pages.

[Den92] L. Denis – « Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld », *Math. Ann.* **294** (1992), p. 213–223.

[Den95] _____, « Problèmes diophantiens sur les t-modules », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **7** (1995), p. 97–110.

[Dio02] S. Dion – *Analyse diophantienne et modules de Drinfeld*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille, 2002.

[DP08] S. David & A. Pacheco – « Le problème de Lehmer abélien pour un module de Drinfeld », *Int. J. Number Theory* **4** (2008), p. 1043–1067.

[Ghi07] D. Ghioca – « The local Lehmer inequality for Drinfeld modules », *J. Number Theory* **123** (2007), p. 426–455.

[Hab13] P. Habegger – « Small height and infinite nonabelian extensions », *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 11, p. 2027–2076.

[Hay79] D. Hayes – « A brief introduction to Drinfeld modules », *Studies in algebra and number theory, Adv. in Math. Suppl. Stud.* **6** (1979), p. 173–217.

[Hay92] _____, « Explicit class field theory in global function fields », *The Arithmetic of Function Fields. Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* **2** (1992), p. 1–32.

[LM04] T. Loher & D. Masser – « Uniformly counting points of bounded height », *Acta. Arith.* **111** (2004), no. 3, p. 277–297.

[Mas86] D. Masser – « Letter to D. Bertrand », (1986).

[Poo95] B. Poonen – « Local height functions and the Mordell-Weil theorem for Drinfeld modules », *Compos. Math.* **97** (1995), no. 3, p. 349–368.

[Poo98] ———, « Drinfeld modules with no supersingular primes », *Internat. Math. Res. Notices* **3** (1998), p. 151–159.

[Sug13] K. Sugiyama – « On a generalization of Deuring's results », *Prépublication* (2013).

Table des matières

Remerciements 3

Introduction 5

Chapitre 1. Minorations géométriques sur les variétés abéliennes 9
1. Le problème de Bogomolov effectif 9
2. Résultats pour les variétés banales 10
3. Le cas des hypersurfaces 12
4. Perspectives 14
Bibliographie 14

Chapitre 2. Problèmes de hauteur et courbes elliptiques 17
1. Le problème de Lehmer sur les variétés abéliennes 17
2. Le cas des extensions galoisiennes 18
3. La propriété (B) 19
4. Corps engendrés par une famille d'invariants singuliers 20
5. Perspectives 21
Bibliographie 22

Chapitre 3. Petite hauteur canonique sur les modules de Drinfeld 25
1. Présentation 25
2. Torsion des modules de Drinfeld non exceptionnels de rang 2 26
3. Le problème de Lehmer pour les extensions inséparables 27
4. Minorations de la hauteur avec et sans CM 28
5. Perspectives 29
Bibliographie 30