



HAL
open science

Équations aux dérivées partielles stochastiques

Bruno Saussereau

► **To cite this version:**

Bruno Saussereau. Équations aux dérivées partielles stochastiques. Mathématiques [math]. Université de Franche-Comté (UFC), 2012. tel-02276250

HAL Id: tel-02276250

<https://univ-fcomte.hal.science/tel-02276250v1>

Submitted on 2 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Université de Franche-Comté

Document de synthèse en vue de l'obtention du diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Équations aux dérivées partielles stochastiques ;
Équations différentielles stochastiques dirigées par un
mouvement brownien fractionnaire

Bruno SAUSSEREAU

21 Novembre 2012

Présenté devant le jury composé de

M. Vlad BALLY,	Université de Marne-la-Vallée,	Examineur,
M. Arnaud DEBUSSCHE,	ENS Cachan, Antenne de Bretagne,	Rapporteur,
M. Laurent DENIS,	Université d'Évry Val d'Essonne,	Examineur,
M. Martin HAIRER,	Université de Warwick,	Rapporteur,
M. Youri KABANOV,	Université de Franche-Comté,	Examineur,
M. Samy TINDEL,	Université de Lorraine,	Rapporteur.

Remerciements

Avant d'aborder la partie purement mathématique de mon mémoire, je commence par adresser quelques remerciements aux personnes qui, de près ou de loin, ont fait que j'ai pu mener à bien mes travaux de recherche dans d'excellentes conditions.

Mes premiers iront aux rapporteurs, à savoir Arnaud Debussche, Martin Hairer et Samy Tindel qui ont accepté cette lourde tâche qui est pour moi une marque de reconnaissance. Mes seconds iront aux membres du jury, Vlad Bally, Laurent Denis et Youri Kabanov.

J'aimerais ensuite remercier mes co-auteurs Vlad Bally, Benjamin Bergé, Sébastien Darses, David Nualart et Lucretiu Stoica pour leur patience et les échanges fructueux qui m'ont beaucoup apporté. Je n'oublie pas Yves Ducl. Les nombreuses discussions sur l'enseignement des probabilités et statistiques dans le secondaire m'ont sans aucun doute fait progresser dans la pratique de mon enseignement universitaire.

Je remercie les membres du LMB qui collectivement font de ce laboratoire un cadre de travail calme et serein. Une pensée particulière pour Landy qui me supporte déjà depuis sept années dans le même bureau. Une pensée amicale à Cédric, Christophe, Jean-Robert, Nabile, Nico et Stefan...

Je ne peux terminer ces quelques lignes qu'avec une pensée pour la femme de ma vie Ninie et nos trois trésors Lou, Nine et Solal.

Table des matières

Introduction	7
Liste des travaux	9
1 Équations aux dérivées partielles stochastiques	11
1.1 Une application de la compacité sur l'espace de Wiener-Sobolev	11
1.2 Comportement en temps long	15
1.3 Lois de conservation scalaire avec un bruit fractionnaire	17
1.4 Un schéma d'approximation numérique pour une équation aux dérivées partielles avec un bruit multiplicatif	22
2 Équations différentielles stochastiques fractionnaires	25
2.1 Calcul de Malliavin	26
2.2 Sur la distance entre les EDS browniennes et les EDS fractionnaires	31
2.3 Retournement du temps pour un mouvement brownien fractionnaire avec dérive	34
2.4 Inégalités de transport	36
2.5 Inférence non paramétrique	39
3 Autres thématiques étudiées	45
3.1 Inégalités exponentielles pour des martingales fractionnaires	45
3.2 Approximation de l'enveloppe de Snell et options américaines	48
Bibliographie	51

Introduction

Ce texte représente une synthèse de mes activités de recherche qui s'articulent principalement autour de deux thèmes : les équations aux dérivées partielles stochastiques et les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire. Le fil conducteur des différents travaux que j'ai menés est certainement l'étude de comportement qualitatif de solutions d'équations stochastiques, qu'elles soient aux dérivées partielles ou différentielles fractionnaires. En effet, même si une partie des résultats concerne des problèmes d'existence et d'unicité, ou de calcul de Malliavin, l'étude des trajectoires, la comparaison entre les comportements provenant d'un mouvement brownien fractionnaire et ceux provenant d'un mouvement brownien classique sont toujours des motivations que j'ai en tête et qui motivent le développement et l'étude d'outils et de propriétés plus abstraites.

Le premier chapitre de ce mémoire traite des équations aux dérivées partielles stochastiques. Divers aspects sont abordés. Une application d'un théorème de compacité sur l'espace de Wiener-Sobolev est utilisé pour établir l'existence et l'unicité d'une équation donc la condition terminale est une distribution (section 1.1). Le comportement qualitatif de deux types d'équation est alors mené. Tout d'abord le comportement en temps long dans la section 1.2 et l'étude d'une mesure invariante pour une équation sans viscosité (section 1.3). Enfin, un nouveau schéma d'approximation pour une équation aux dérivées partielles stochastiques avec un bruit multiplicatif est décrit dans la section 1.4.

Les équations différentielles dirigées par un mouvement brownien fractionnaire sont le sujet du deuxième chapitre. La régularité au sens de Malliavin a été le premier travail sur ce sujet (voir section 2.1). En combinant ce dernier travail et les idées de relative compacité déjà abordées pour les équations aux dérivées partielles stochastiques, une étude sur la "proximité" entre les solutions d'équations dirigées par un mouvement brownien fractionnaire et celles dirigées par un mouvement brownien classique est menée dans la section 2.2. Le problème du retournement du temps pour un mouvement brownien fractionnaire avec dérive est aussi étudié en gardant à l'esprit l'idée de comparer les résultats obtenus avec ceux du cas classique. L'étude des équations fractionnaires se termine par le problème de l'estimation non paramétrique du coefficient de dérive.

Dans le dernier chapitre, je décris brièvement des travaux indépendants de mes deux thématiques principales décrites dans les chapitres 1 et 2. Ceci étant dit, le sujet des inégalités exponentielles pour des martingales fractionnaires développé dans la section 3.1 a été motivé par le problème d'estimation non paramétrique décrit dans la section 2.5.

Les réflexions menées à l'IREM de Franche-Comté et les diverses formations que j'ai données à des professeurs de collège et lycée ont abouti à deux articles de didactique des mathématiques (voir référence [D1] et [D2] ci-après). Bien que ces travaux me tiennent à cœur, je ne donnerai pas plus de détails sur ces réflexions dans ce mémoire afin de garder une certaine unité.

À noter pour terminer cette courte introduction que les résultats seront parfois formulés sous des hypothèses et notations un peu imprécises juste par souci de ne pas alourdir la présentation.

Liste des travaux

La liste respecte l'ordre chronologique de publication des articles mais pas celui de leurs réalisations. Quand les articles qui suivent seront cités dans le texte, la numérotation utilisée sera celle de la bibliographie générale se situant à la page 51 . La numérotation de la bibliographie générale est aussi rappelée dans la liste ci-dessous.

Articles parus ou à paraître

- [A1] Vlad Bally & Bruno Saussereau. Approximation of the Snell Envelope and American Options Prices in dimension one. *ESAIM : P&S, March 2002, Vol. 6, p. 1-19.* [BS02a]
- [A2] Vlad Bally & Bruno Saussereau. A relative compactness criterion in Wiener-Sobolev spaces and application to semi-linear Stochastic PDEs. *J. Funct. Anal. 210 (2004), no. 2, p. 465-515.* [BS04]
- [A3] Benjamin Bergé & Saussereau Bruno. On the Long-Time Behaviour of a Class of Parabolic SPDE's : Monotonicity Methods and Exchange of Stability. *ESAIM : P&S, October 2005, Vol. 69, p. 254-276.* [BS05]
- [A4] Sébastien Darses & Bruno Saussereau. Time reversal for drifted fractional Brownian Motion with Hurst index $H > 1/2$. *Electronic Journal of Probability. Vol. 12 (2007) Paper no. 43, p. 1181-1211.* [DS07]
- [A5] David Nualart & Bruno Saussereau. Malliavin calculus for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion. *Stochastic Processes and their Applications 119 (2009), p.391-409.* [NS09]
- [A6] Bruno Saussereau. A remark on the mean square distance between the solutions of fractional SDEs and Brownian SDEs. *Stochastics Vol. 84, No 1, (2012), p. 1-19.* [Sau12d]
- [A7] Bruno Saussereau. Transportation inequalities for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion. *Bernoulli 18(1), (2012), p. 1-23.* [Sau12e]
- [A8] Bruno Saussereau & Lucretiu Stoica. Scalar conservation laws with fractional stochastic forcing : existence, uniqueness and invariant measure. *Stochastic Processes and their Applications 122 (2012), p. 1456-1486.* [SS12]
- [A9] Bruno Saussereau. Deviation probability bounds for fractional martingales and related remarks. *Statist. Probab. Lett. 82 (2012), p. 1610-1618.* [Sau12a]

Articles soumis

- [A10] Bruno Saussereau. Non parametric inference for fractional diffusion. *Soumis (2012).* [Sau12c]
- [A11] Bruno Saussereau. A new numerical scheme for stochastic partial differential equations with multiplicative noise. *Preprint (2012).* [Sau12b]

Thèse de doctorat

[T] Saussereau Bruno. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles Stochastiques *Thèse de doctorat de l'université du Maine (2001)*. [Sau01]

Publications en didactique

[D1] Yves Ducl & Bruno Saussereau. Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième? *Repères IREM. 77, octobre 2009*. [DS09]

[D2] Ducl Yves & Bruno Saussereau. La prise de décision de la Seconde à la Première. *Repères IREM. 85, octobre 2011*. [DS11]

Tous mes travaux sont téléchargeables à partir de ma page personnelle

<http://bsauss.perso.math.cnrs.fr/>

Chapitre 1

Équations aux dérivées partielles stochastiques

On présente dans ce chapitre les travaux relatifs aux équations aux dérivées partielles stochastiques. Les formes des équations étudiées seront assez différentes : elles pourront être paraboliques ou bien sans viscosité. La nature des sujets traités ira des problèmes d'existence et d'unicité jusqu'à l'étude de schéma numérique en passant par l'étude de comportement en temps long et d'existence de mesure invariante. Les publications liées à ce chapitre sont : [BS04, BS05, SS12, Sau12b].

1.1 Une application de la compacité sur l'espace de Wiener-Sobolev

Dans [BS04], nous nous sommes intéressés au problème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique semi-linéaire suivante

$$\begin{aligned}(\partial_t + L)u + f(t, x, u, \nabla u \sigma) + h(t, x, u) \dot{B}_t &= 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(T, \cdot) &= \Lambda,\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $B = (B^1, \dots, B^d)$ est un mouvement brownien standard et $L = \sigma \sigma^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x}$ est un opérateur différentiel du second ordre (qui est aussi le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$) et Λ est une distribution.

Si Λ est une fonction régulière et f et h sont aussi suffisamment régulières, il a été montré dans [PP94] que l'équation (1.1) ci-dessus a une unique solution classique et les auteurs ont aussi donné une interprétation probabiliste de u en terme d'équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades. Ils ont aussi prouvé que l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde associée à l'équation aux dérivées partielles stochastique ci-dessus a une unique solution sous des hypothèses plus faibles, essentiellement Λ est une fonction mesurable et f et h sont Lipschitz continues. En utilisant alors la solution de l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde, on peut construire un champs aléatoire $u(t, x)$, qui est exactement la solution classique de l'équation aux dérivées partielles stochastique dans le cas où les coefficients sont réguliers. Mais dans notre contexte, u n'est plus régulière en t et x donc il n'y a plus de solution classique. Le sens faible choisi est une formulation variationnelle empruntée à [BM01a] qui sera brièvement décrite par la suite.

L'étape la plus intéressante dans ce problème est la construction de la solution. L'idée est simple et standard. Comme l'opérateur L est supposé uniformément elliptique, le semi-groupe associé jouit d'une propriété de régularisation. Ainsi, même si $u(T, \cdot) = \Lambda$ est une distribution, $u(t, \cdot)$ sera régulier dès lors que $t < T$. Pour utiliser cette idée, on considère une suite de fonctions régulières $(g_n)_{n \geq 0}$ telle que $g_n \rightarrow \Lambda$ dans le sens des distributions. On définit alors u_n comme la solution de (1.1) avec condition terminale g_n . Le résultat de [PP94] nous assure que u_n existe et il reste à passer à la limite et construire $u := \lim_n u_n$. Bien sûr, on doit prendre en compte le fait que g_n explose quand $n \rightarrow \infty$ mais l'uniforme ellipticité nous permettra de contourner cette difficulté.

Nous devons donc prouver que u_n admet une limite ou au moins (et c'est suffisant) admet une sous-suite convergente, c'est-à-dire montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans \mathbf{L}^2 . Rappelons que les u_n sont des champs aléatoires à valeurs dans l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^d)$ donc on pourrait utiliser, en se restreignant dans un premier temps à un domaine borné régulier \mathcal{O} , le théorème d'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\mathcal{O})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$. En effet si on montre que la suite $(\|u_n\|_{\mathbf{H}^1(\mathcal{O})})_{n \geq 0}$, est bornée, alors $(u_n(t, \cdot))_{n \geq 0}$ sera relativement compacte dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ et l'on pourra extraire une sous-suite convergente $(u_{n_k})_{k \geq 0}$. Mais u_n est un champs aléatoire donc dépend de l'aléa ω et donc la sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ dépendra aussi de ω . Il n'est pas clair que l'on puisse extraire une sous-suite qui sera convergente pour tout ω . C'est pourquoi nous devons employer un critère de compacité qui prendra en compte la dépendance en $x \in \mathbf{R}^d$ et en $\omega \in \Omega$ de la suite u_n , c'est-à-dire un critère de compacité sur l'espace de Wiener-Sobolev. Ce critère est donné par le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que

- $x \mapsto u_n(t, x, \omega)$ est dans $\mathbf{H}^1(\mathcal{O})$, $dt \times dP$ -presque-sûrement ;
- $\omega \mapsto u_n(t, x, \omega)$ appartient à $\mathbb{D}^{1,2}$ (l'espace de des variables aléatoires une fois dérivable au sens de Malliavin) $dt \times dx$ -presque-sûrement.

Supposons que

- (H1) la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega; \mathbf{H}^1(\mathcal{O}))$;
- (H2) pour toute fonction test φ que l'on suppose régulière et à support compact, on note $u_n^\varphi := \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) u_n(t, x, \omega) dx$ et on demande que la suite $(u_n^\varphi)_{n \geq 0}$ soit bornée dans $\mathbf{L}^2([0, T]; \mathbb{D}^{1,2})$;
- (H3) pour $h = (h_1, h_2) \in [0, T] \times [0, T]$ on supposera que

$$\int_0^T |\mathbf{E} u_n^\varphi(t+h_1, \omega) - \mathbf{E} u_n^\varphi(t, \omega)|^2 dt + \int_0^T \int_0^T \mathbf{E} |D_{\theta+h_2} u_n^\varphi(t+h_1, \omega) - D_\theta u_n^\varphi(t, \omega)|^2 dt d\theta \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0,$$

où les fonctions sont supposées être prolongées par 0 en dehors de $[0, T]$.

Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathbf{L}^2([0, T] \times \mathcal{O} \times \Omega)$.

On remarque que l'hypothèse (H1) est la variante aléatoire de l'hypothèse de bornitude dans $\mathbf{H}^1(\mathcal{O})$. L'intégration contre une fonction test φ a un effet de régularisation par rapport à la variable d'espace et (H2) concerne seulement le comportement aléatoire. Quant à la troisième, elle fait intervenir des estimations sur des accroissements. Ce type de condition provient du critère de relative compacité sur $\mathbf{L}^2([0, T]^2)$ de Riesz-Fréchet-kolmogorov (voir [Bre83, Th. 4.25]).

L'hypothèse (H3) présente une généralisation de la version de ce théorème proposée dans [Sau01]. Dans ma thèse de doctorat, on avait supposé une hypothèse beaucoup plus forte qui consistait à demander que pour tout $m \geq 1$, la suite des noyaux $(f_{m, \varphi}^n)_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathbf{L}^2([0, T]^{m+1})$, où les $f_{m, \varphi}^n(t, \cdot)$ sont les noyaux du m -ième chaos de Wiener de $u_n^\varphi(t)$. En utilisant la formule de Stroock, on peut contrôler les chaos d'ordre m via les dérivées de Malliavin d'ordre m . Comme on doit le faire pour n'importe quel ordre m , les calculs deviennent

assez lourds. En utilisant la symétrie des densités de chaos, on peut déduire des estimations sur les accroissements de $f_{m,\varphi}^n$ de propriétés sur les accroissements de $u_n^\varphi(t)$ et de sa dérivée de Malliavin (voir [BS04, Th. 2]).

Finalement, on remarque que :

- si u_n dépend seulement de x , alors nos hypothèses se réduisent à (H1) et notre théorème devient le théorème classique d'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\mathcal{O})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$;
- si u_n dépend seulement de t , on retrouve le théorème de relative compacité sur $\mathbf{L}^2([0, T])$ sous l'hypothèse (H3);
- si finalement u_n est juste une variable aléatoire, un théorème de compacité relative sur l'espace de Wiener du même type a été proposé dans [DPMN92].

Le théorème 1 va être utilisé dans le contexte suivant. On considère une équation aux dérivées partielles stochastique du type

$$u(t, x) = g(x) + \int_t^T \mathcal{L}u(s, x) ds + \int_t^T f(s, x, u(s, x), \nabla u(s, x) \sigma(x)) ds + \int_t^T h(s, x, u(s, x)) \overleftarrow{dB}_s, \quad (1.2)$$

avec $u = (u_1, \dots, u_N)$, ∇u est la matrice des dérivées par rapport à x et $\mathcal{L}u = (Lu_1, \dots, Lu_N)$ où $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. L'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien $(B_t^1, \dots, B_t^l)_{0 \leq t \leq T}$ est une intégrale d'Itô rétrograde. On introduit l'ensemble $\mathcal{U}_{C,\epsilon,\varsigma}$ des solutions de (1.2) quand les coefficients (b, σ, f, g, h) appartiennent à $\Gamma_{C,\epsilon,\varsigma}$ où pour C, ϵ et $\varsigma > 0$ donnés, $\Gamma_{C,\epsilon,\varsigma}$ est la classe des coefficients (b, σ, f, g, h) vérifiant

- b, σ (respectivement f, h) et leur dérivées jusqu'à l'ordre trois (respectivement jusqu'à l'ordre deux) sont bornées par C .
- $\sigma \sigma^* \geq \epsilon I$
- pour tout $0 < t < T$, $\|P_{T-t} g\|_\infty \leq C/(T-t)^\varsigma$. Ici P_t est le semi-groupe associé à l'opérateur L .

On montre dans [BS04, Th. 3] que l'ensemble $\mathcal{U}_{C,\epsilon,\varsigma}$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^2([0, \tau] \times \mathcal{O} \times \Omega)$, pour tout $\tau > T$ et tout $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^d$. Un résultat dans le même esprit sera donné pour des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire dans la section 2.2.

Retournons à notre projet initial qui est l'étude du problème d'existence et d'unicité de l'équation (1.1). On décrit le résultat d'existence et d'unicité sans toutefois introduire toutes les notations (voir [BS04, Section 4] pour des énoncés précis). La distribution Λ est une distribution d'ordre fini, disons k . Cela signifie qu'elle appartient au dual d'un espace de Sobolev à poids (le poids est noté ρ) et on note $\|\cdot\|_{k,\rho}$ la norme sur ce dual. Une approximation de Λ est donnée par une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de fonctions régulières qui seront utilisées comme conditions terminales. La suite étant proche d'une distribution, on l'autorise à exploser quand $t \uparrow T$, ce qui crée des difficultés techniques. Ces difficultés seront surmontées car sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité de σ , la diffusion associée à l'opérateur \mathcal{L} aura une densité régulière dont on connaît des estimations sur les dérivées (voir [KS85]). Ainsi la condition sur g dans la définition de $\Gamma_{C,\epsilon,\varsigma}$ sera vérifiée dès que g sera bornée faiblement (au sens des distributions). La propriété de relative compacité énoncée ci-dessus nous donne naturellement un candidat pour être la solution de notre problème : ce sera la valeur d'adhérence obtenue par le critère de compacité. L'étude de l'unicité fait intervenir des arguments plus classiques.

On obtient ainsi l'existence et l'unicité de (1.1).

Théorème 2. *Il existe un unique champs aléatoire u de $[0, T] \times \mathbf{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ appartenant à un certain espace de processus $\mathcal{W}_{k+2, \rho}$ (voir [BS04, Def. 2] pour ne pas alourdir l'exposé) tel que*

(i) $\lim_{s \uparrow T} \mathbf{E}^B \|u(s, \cdot) - \Lambda\|_{k+2, \rho}^2 = 0$;

(ii) *pour toute fonction test $\varphi \in C_c^2([0, T] \times \mathbf{R}^d)$, et tout $0 \leq t < \tau < T$,*

$$\begin{aligned} \int_t^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \partial_s \varphi(s, x) u(s, x) ds dx + \int_{\mathbf{R}^d} u(t, x) \varphi(t, x) dx &= \int_{\mathbf{R}^d} u(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \\ &+ \int_t^\tau \int_{\mathbf{R}^d} A(u, \varphi)(s, x) dx ds + \int_t^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(s, x) f(s, x, u, \nabla u \sigma) dx ds \\ &+ \int_t^\tau \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(s, x) h(s, x, u) dx d\overleftarrow{B}_s \quad P^B - a.s., \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $A(\varphi, \psi) := \frac{1}{2} \nabla \varphi \sigma \sigma^* \nabla \psi + \varphi \operatorname{div}(b - \tilde{A}) \psi$ et $\tilde{A}_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \frac{\partial(\sigma \sigma^*)_{ki}}{\partial x_k}$ pour $1 \leq i \leq d$.

En utilisant les résultats de [BM01a], on montre une formule de représentation de la solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (1.1) par la solution d'une équation différentielle doublement stochastique rétrograde formulée dans un sens faible. En effet, en notant $(X_s^{t,x})_{t \leq s \leq T}$ la diffusion associée à l'opérateur différentiel du second ordre \mathcal{L} , on a le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit u une solution de (1.1). Alors le couple de processus $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{t \leq s < T}$ défini par $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$ et $Z_s^{t,x} = \nabla u(s, X_s^{t,x}) \sigma(X_s^{t,x})$ est une solution faible de l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde*

$$Y_s^{t,\cdot} = \Lambda + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,\cdot}, Z_r^{t,\cdot}) dr + \int_s^T h(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,\cdot}) d\overleftarrow{B}_r - \int_s^T Z_r^{t,\cdot} dW_r, \quad (1.4)$$

avec condition terminale Λ .

On précise la notion de solution pour l'équation (1.4) : on demande que les processus soient adaptés, à valeurs dans le dual d'un espace de Sobolev à poids, et vérifient pour tout $\varphi \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$ et tout $t \leq \tau < T$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) Y_\tau^{t,x} dx &= \int_{\mathbf{R}^d} Y_\tau^{t,x} \varphi(x) dx + \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \left[\int_s^\tau f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) dr \right] dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \left[\int_s^\tau h(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}) d\overleftarrow{B}_r \right] dx - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \left[\int_s^\tau Z_r^{t,x} dW_r \right] dx. \end{aligned}$$

La condition terminale est prise en compte par la condition limite

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) Y_\tau^{t,x} dx \xrightarrow[\tau \rightarrow T]{L^2(\Omega)} \Lambda(\psi_t(T, x)),$$

où $(s, x) \mapsto \psi_t(s, x)$ est avec la fonction test aléatoire définie par

$$\psi_t(s, x) = \varphi(x) - \sum_{i,j=1}^d \int_t^s \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_t(r, x) \sigma_{ij}(x)) dW_r^j + \int_t^s L^* \psi_t(r, x) dr.$$

Ces fonctions tests aléatoires jouent un rôle très important dans l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (voir [BL97]) et des équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (voir [BM01a]) formulées en un sens faible comme celui proposé ci-dessus.

On déduit du théorème de comparaison que

$$u_0 \leq v_1(t) \leq u_\varphi(t, x) \leq v_2(t) \leq u_1. \quad (1.7)$$

La méthode consiste alors à tirer le plus d'informations possibles du comportement des solutions des équations différentielles ci-dessus. Par exemple, si $\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = u_1$ alors la solution u_φ tendra aussi vers u_1 par comparaison. Les comportements asymptotiques des v_i est bien connu et est décrit via la fonction d'échelle

$$F(u) = \int_\nu^u \exp\left(-2 \int_\mu^y \frac{g(z)}{|h(z)|^2} dz\right) dy$$

où $u_0 < \mu, \nu < u_1$. Une combinaison de quatre hypothèses sur les coefficients permet de couvrir tous les comportements limite de F lorsque $u \rightarrow u_0$ et $u \rightarrow u_1$. On décrit ainsi les différents comportements asymptotiques de $(v_i)_{t \geq 0}$. On suppose que les fonctions g et h_j de classe C^2 , nulles en u_0 et u_1 , h est de signe constant et $|h'(u_i)| > 0$ pour $i = 0, 1$. On considère les cas suivants :

- (A) $2g'(u_0) < |h'(u_0)|^2$ et $2g'(u_1) \geq |h'(u_1)|^2$
- (B) $2g'(u_0) \geq |h'(u_0)|^2$ et $2g'(u_1) < |h'(u_1)|^2$,
- (C) $2g'(u_0) \geq |h'(u_0)|^2$ et $2g'(u_1) \geq |h'(u_1)|^2$,
- (D) $2g'(u_0) < |h'(u_0)|^2$ et $2g'(u_1) < |h'(u_1)|^2$.

Une application directe du théorème de comparaison donne des résultats lorsque l'attracteur est constitué d'un des états stables, ou lorsque la solution oscille entre les deux états stables.

Théorème 4.

- Sous l'hypothèse (A) on a $\mathbf{P}\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u_\varphi(t, \cdot) - u_0\|_\infty = 0\} = 1$ et on calcule explicitement l'exposant de Lyapunov

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|u_\varphi(t, \cdot) - u_0\|_\infty = g'(u_0) - \frac{1}{2}|h'(u_0)|^2 < 0 \text{ -p.s..}$$

- Le cas (B) donne les mêmes résultats en remplaçant u_0 par u_1 .

- Sous la condition (C), on a presque-sûrement

- (i) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} u_\varphi(t, x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,inf}_{x \in D} u_\varphi(t, x) = u_1$;
- (ii) $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} u_\varphi(t, x) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,inf}_{x \in D} u_\varphi(t, x) = u_0$.

La méthode de monotonie n'est plus efficace quand on s'intéresse au dernier type d'hypothèse (D). En effet, en utilisant ce type d'argument, on peut seulement montrer que

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u_\varphi(t, \cdot) - u_0\|_\infty = 0\right\} \geq \frac{F(u_1) - F(\varphi_2)}{F(u_1) - F(u_0)} > 0$$

et que

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u_\varphi(t, \cdot) - u_1\|_\infty = 0\right\} \geq \frac{F(\varphi_1) - F(u_0)}{F(u_1) - F(u_0)} > 0.$$

Malheureusement la somme de ces deux probabilités ne vaut 1 que lorsque $\varphi_1 = \varphi_2$, ce qui est inintéressant. On abandonne donc cette méthode et on va désormais comparer la solution u_φ de (1.5) avec sa moyenne spatiale

$$Qu_\varphi(t, \cdot) = \frac{1}{|D|} \int_D u_\varphi(t, x) dx.$$

On établit que si la constante d'ellipticité k_1 est suffisamment grande alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\|u_\varphi(t, \cdot) - Qu_\varphi(t, \cdot)\|_2^2 \leq \exp(-\alpha t)\|\varphi - Q\varphi\|_2^2$$

et donc l'étude du comportement asymptotique de u_φ se ramène à celui du processus $(Qu_\varphi(t, \cdot))_{t \geq 0}$ qui vérifie

$$Qu_\varphi(t, \cdot) = Q\varphi(\cdot) + \int_0^t Qg(u_\varphi(s, \cdot)) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t Qh_j(u_\varphi(s, \cdot)) dW_s^j. \quad (1.8)$$

Sous l'hypothèse (D), on montre que

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} Qu_\varphi(t, \cdot) = u_0 \right\} = 1 - \mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} Qu_\varphi(t, \cdot) = u_1 \right\}$$

et on en déduit le théorème suivant.

Théorème 5. *On suppose (D) et que le coefficient d'ellipticité est grand. Soit la variable aléatoire de type Bernoulli ξ définie par*

$$\xi = u_0 \mathbf{1}_{\Omega_0} + u_1 \mathbf{1}_{\Omega_1}$$

où $\Omega_0 = \{\lim_{t \rightarrow +\infty} Qu_\varphi(t, \cdot) = u_0\}$ et $\Omega_1 = \{\lim_{t \rightarrow +\infty} Qu_\varphi(t, \cdot) = u_1\}$. Alors on a

$$\mathbf{E}\|u_\varphi(t, \cdot) - \xi\|_2^2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Les résultats obtenus couvrent et généralisent la plupart des résultats de [CV98, CV00, BCV01, HSZ02]. Une discussion plus approfondie au sujet des relations entre ces différents travaux est proposée dans la section 5 de [BS05]. Bien qu'il existe d'autres pistes pour étudier le comportement asymptotique de la solution de (1.5), nous nous sommes efforcés dans notre article à dégager les idées et les arguments qui ont permis d'aboutir aux résultats qui avaient été précédemment obtenus : tout d'abord exploiter au maximum la méthode de monotonie puis utiliser l'équation (1.8) sur la moyenne spatiale de la solution. Ces arguments étaient parfois cachés dans des démonstrations techniques. Leur mise à jour nous a permis de compléter ces études.

1.3 Lois de conservation scalaire avec un bruit fractionnaire

En collaboration avec Lucretiu Stoica, nous nous sommes intéressés dans [SS12] à l'étude d'une équation aux dérivées partielles stochastique sans terme de viscosité, c'est-à-dire sans opérateur différentiel du second ordre, avec une perturbation aléatoire additive. Le type d'équation étudié est le suivant :

$$\partial_t u(t, x, \omega) + \partial_x \Psi(u(t, x, \omega)) = \partial_x \dot{F}(t, x, \omega), \quad (1.9)$$

avec une condition initiale $u(t_0, x) = u_0(x)$ déterministe. La fonction Ψ est appelée le flux. Le terme de force aléatoire s'écrit $F(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) B_k(t)$ où les fonctions F_k sont déterministes et régulières et les processus $(B_k(t))_{t \in (-\infty, \infty)}$ sont indépendants et à trajectoires höldériennes. Quand le terme de force F est nul, l'équation devient déterministe et l'exemple le plus célèbre est l'équation de Burgers obtenue lorsque le flux est la fonction $u \mapsto u^2/2$. Un fait marquant pour ce type d'équation est qu'il n'y a pas toujours unicité de la solution faible. C'est pour cela que la

notion de solution entropique a été introduite pour sélectionner la solution qui a le plus de "sens physique". De plus, cette solution entropique sera qualitativement très bien décrite. Par exemple les discontinuités seront liées à la création de chocs et étudiées grâce aux équations caractéristiques. On pourra se reporter à [Daf77, Daf05, Eva98, Hör97, Ser99] pour plus de précisions. Ainsi une très importante littérature existe sur ce sujet mais dans le cas stochastique, peu de travaux ont été faits.

Le sens donné à l'équation (1.9) est un sens faible : l'équation (1.9) est intégrée contre des fonctions tests φ et on écrit

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} u(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \psi(u(t, x)) dx dt = - \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \varphi(t_0, x) dx - \int_{\mathbf{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ F_k(x) \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t \partial x} (B_k(t) - B_k(t_0)) dt \right\} dx . \quad (1.10)$$

L'intégration par rapport au bruit est réalisée trajectoire par trajectoire. La forme de cette intégrale peut sembler au premier abord inhabituelle. Elle est justifiée en considérant l'intégrale de Riemann-Stieltjes (voir [You36]). En effet, pour une fonction g régulière (disons au moins C^1 en pensant aux fonctions tests), l'intégrale de Riemann-Stieltjes est définie par

$$\int_{\tau}^t g(s) dB_k(s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n g(t_i) (B_k(t_{i+1}) - B_k(t_i))$$

où Δ est le pas de la subdivision $\{\tau = t_0 \leq t_1 \leq \dots t_{n+1} = t\}$. Après un calcul élémentaire, on montre que

$$\int_{\tau}^t g(s) dB_k(s) = - \int_{\tau}^t (B_k(s) - B_k(\tau)) \dot{g}(s) ds + (B_k(t) - B_k(\tau)) g(t) \quad (1.11)$$

et le second terme du membre de droite est nul si on considère, comme dans (1.10), une fonction à support compact et $t = +\infty$.

Comme c'était le cas pour une loi de conservation classique, il n'y a pas toujours unicité de la solution faible pour une loi de conservation stochastique. La notion de solution entropique "à la Kružkov" [Kru70] a été généralisée aux lois de conservation stochastique que très récemment dans [FN08, BVW12] et une formulation cinétique a été proposée dans [DV10]. Tous ces travaux utilisent un bruit de type brownien.

Notre travail s'est très fortement inspiré de [EKMS00] dans lequel les auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de l'équation de Burgers avec des bruits B_k qui sont des mouvements browniens indépendants. La notion de solution utilisée est une notion de solution entropique alliant une formulation faible et une condition d'entropie. Ce sera ce type de notion de solution que nous utiliserons.

Une première partie de notre travail a donc été de généraliser ce résultat au cas

- d'un flux ψ uniformément convexe, à dérivée lipschitzienne, satisfaisant une condition de croissance et dont la transformée de Legendre est localement lipschitzienne ;
- d'un bruit (pas forcément gaussien) tel que pour tout k , les trajectoires de B_k sont hõlderiennes.

On a montré le résultat suivant :

Théorème 6. *Il existe une unique solution entropique à la loi de conservation scalaire (1.9) :*

c'est-à-dire qu'il existe un unique champs aléatoire u qui satisfait la formulation faible (1.10) et presque-sûrement la condition entropique

$$u(t, x + z, \omega) - u(t, x, \omega) \leq C \left(1 + \frac{1}{t-t_0}\right) z \quad (1.12)$$

pour tout $(t, x) \in (t_0, \infty) \times \mathbf{R}$ et $z > 0$.

Il faut noter que la condition entropique (1.12) est différente de celle utilisée dans [EKMS00]. En effet, (1.12) est la condition entropique historique appelée "condition E" dans l'article d'Oleïnik [Ole57]. Elle implique la condition $u(t, x+) \leq u(t, x-)$ proposée dans [EKMS00]. Cette différence tient du fait de la méthode employée par les auteurs pour montrer leur résultat. Ils ont en effet utilisé la méthode de la viscosité évanescence et la transformation de Hopf-Cole, transformation qui n'est utilisable que dans le cas de l'équation de Burgers.

Dans le cas d'un flux quelconque, nous avons utilisé la relation entre le problème de loi de conservation et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman qui lui est naturellement associé. De manière heuristique, on peut expliquer ce lien en procédant à une intégration par parties dans (1.10) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \partial_t \varphi(t, x) u(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \partial_x \varphi(t, x) \Psi(u(t, x)) dx dt = \\ - \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \varphi(t_0, x) dx + \int_{\mathbf{R}} \int_{t_0}^{\infty} \partial_t \varphi(t, x) v(t, x) dt dx \end{aligned}$$

avec $v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F'_k(x) (B_k(t) - B_k(t_0))$. En posant $w = u + v$,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \partial_t \varphi(t, x) w(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \partial_x \varphi(t, x) \Psi(w(t, x) + v(t, x)) dx dt \\ = - \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \varphi(t_0, x) dx \end{aligned}$$

et w est solution de la loi de conservation scalaire (toujours stochastique mais sans "intégrale stochastique")

$$\partial_t w + \partial_x \Psi(w + v) = 0 .$$

Si on intègre cette équation par rapport à x , on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\partial_t W + \Psi(\partial_x W + v) = 0 ,$$

où W vérifie $\partial_x W = w$. Cette équation est liée à un problème d'optimisation dans lequel l'action fera intervenir la transformée de Legendre de $p \mapsto \Psi(p + v)$. D'après la formule donnant la transformée de Legendre d'une translation, on a $(\Psi(\cdot + v))^*(q) = \Psi^*(q) - vq$, ce qui justifie la forme de l'action proposée dans (1.14) ci-dessous (Ψ^* est la transformée de Legendre du flux Ψ).

Cette méthode a dégagé deux avantages. Le premier étant la possibilité d'utiliser les résultats classiques sur les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et ainsi on a pu éviter la technique de la viscosité évanescence. Par exemple la condition d'entropie (1.12) sera une conséquence de la quasi-concavité de W , l'existence et l'unicité proviendra des résultats classiques sur les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (voir [Eva98, FS93]). Le second est l'obtention quasi immédiate d'une formule du type Lax-Oleïnik.

Proposition 1. Pour $t \geq t_0$, la solution u de (1.9) est donnée par la formule de Lax-Oleïnik :

$$u(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\inf_{\substack{\xi \in \mathbf{H}^1(t_0, t) \\ \xi(t) = x}} \left\{ \mathcal{A}_{t_0, t}(\xi) + \int_0^{\xi(t_0)} u_0(z) dz \right\} \right), \quad (1.13)$$

avec l'action $\xi \mapsto \mathcal{A}_{t_0, t}(\xi)$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t_0, t}(\xi) = & \int_{t_0}^t \left\{ \Psi^*(\dot{\xi}(s)) - \sum_{k \geq 1} (B_k(s) - B_k(t_0)) F'_k(\xi(s)) \dot{\xi}(s) \right\} ds \\ & + \sum_{k \geq 1} (B_k(t) - B_k(t_0)) F_k(\xi(t)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

On remarque que si ξ est régulière (disons continûment dérivable), alors par (1.11), on peut écrire l'action sous la forme

$$\mathcal{A}_{t_0, t}(\xi) = \int_{t_0}^t \Psi^*(\dot{\xi}(s)) ds + \int_{t_0}^t \sum_{k \geq 1} F_k(\xi(s)) dB_k(s).$$

Il faut noter que ces deux premiers résultats ne sont en aucun cas de nature probabiliste. En effet, tous les raisonnements ont été menés trajectoriellement. De plus, même s'ils représentent une généralisation et une réécriture de [EKMS00] en utilisant les techniques d'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, l'apport principal de notre travail proviendra de l'étude de la mesure invariante.

En suivant encore une fois la méthode employée dans [EKMS00], on s'appuiera sur la formule de Lax-Oleïnik (1.13) et sur la méthode des caractéristiques généralisées qui permettent de caractériser les minimiseurs de l'action définie par (1.14) et de donner une estimation de leurs vitesses.

Proposition 2. Si γ est un minimiseur de \mathcal{A} sur $[t_1, t_2]$ avec $\gamma(t_1) = x_1$, $\gamma(t_2) = x_2$ (des valeurs fixées a priori) alors $\dot{\gamma} \in C^1(t_1, t_2)$ et satisfait pour $t_1 \leq r \leq s \leq t_2$

$$(\Psi^*)'(\dot{\gamma}(s)) - (\Psi^*)'(\dot{\gamma}(r)) = \int_r^s \sum_{k \geq 1} F'_k(\gamma(\tau)) dB_k(\tau). \quad (1.15)$$

De plus on a une estimation de sa vitesse donnée par

$$\|\dot{\gamma}\|_{t_1, t_2, \infty} \leq K (t_2 - t_1)^\alpha C_{t_1, t_2} \quad (1.16)$$

où $C_{t_1, t_2} = \sum_{k \geq 1} \|F_k\|_{C^2} \left\{ \sup_{t_1 \leq r \leq r' \leq t_2} |B_k(r) - B_k(r')| \right\}$ et $0 < \alpha < 1$ dépend de la régularité du flux Ψ ($\alpha = 1/2$ pour l'équation de Burgers).

Le fait important est que l'estimation (1.16) fait intervenir les incréments des bruits B_k entre deux instants fixes. Une majoration analogue est alors déduite sur l'action elle-même. C'est uniquement à ce moment qu'une propriété probabiliste du bruit intervient. On l'énonce comme suit : pour tout $\varepsilon > 0$, tout $T > 0$ et pour presque-tout ω , il existe une suite de temps aléatoires $(t_n(\omega))_{n \geq 1}$ qui tend vers $-\infty$ et

$$\forall n, \quad \sup_{t_n - T \leq s \leq t_n} \sum_{k \geq 1} \left\{ \|F_k\|_{C_b^2(\mathbf{R})} |B_k(s) - B_k(t_n)| \right\} \leq \varepsilon. \quad (1.17)$$

On peut décrire (1.17) comme étant une propriété de "silence du bruit" : les accroissements du processus sont arbitrairement petits sur un nombre infini d'intervalles (de temps) arbitrairement

longs.

Dans le cas brownien classique, cette propriété est une conséquence de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien et du lemme de Borel-Cantelli. À ce stade de notre étude, on s'intéresse à une force aléatoire de type mouvement brownien fractionnaire. C'est-à-dire qu'on s'est donné une suite indépendante $((B_k(t))_{t \in \mathbf{R}})_{k \geq 1}$ de mouvements browniens fractionnaires de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$. Pour démontrer (1.17) dans ce contexte, la tâche est plus complexe principalement à cause de la perte de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien fractionnaire. Des estimations sur les accroissements d'un processus gaussien seront toujours possibles via l'utilisation de l'inégalité de Garsia-Rodemich-Rumsey et des estimations de Talagrand pour les petites boules. Par contre on remplacera l'utilisation du lemme de Borel-Cantelli classique par une version conditionnelle et renversée de ce lemme qui s'énonce comme suit.

Lemme 1. *Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de tribu et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements telle que $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout n . Alors les événements*

$$\left\{ \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{A_k} < \infty \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_k} | \mathcal{F}_{k+1}) < \infty \right\}$$

sont presque-sûrement égaux.

La propriété de "silence du bruit" permet alors d'obtenir des informations qualitatives sur des minimisateurs spéciaux, appelés minimisateurs latéraux, qui intuitivement sont des limites de minimisateurs de l'action $\mathcal{A}_{t_0,0}$ lorsque $t_0 \rightarrow -\infty$. Les minimisateurs latéraux sont les outils nécessaires à la construction d'une solution invariante $(t, x) \mapsto u^\sharp(t, x)$ qui part de 0 en $t_0 = -\infty$.

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la mesure invariante pour l'équation (1.9) qui sera en fait une mesure atomique concentrée sur la solution invariante u^\sharp . Pour cela on note \mathbb{D} l'espace de Skorohod des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui ont des discontinuités du premier type. On le munit de sa tribu borélienne \mathcal{D} . L'espace canonique $\Omega = C_0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est l'espace des fonctions continues nulles en 0 et θ^τ est l'opérateur de décalage sur Ω d'incrément τ défini par $\theta^\tau(\omega)(\cdot) = \omega(\cdot + \tau) - \omega(\tau)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Cette expression du décalage laisse bien la mesure de Wiener fractionnaire sur $C_0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ invariante. L'opérateur "solution" S_ω^τ est défini pour $v \in L^\infty(\mathbf{R})$ par $S_\omega^\tau(v)$, la solution de (1.9) au temps τ , avec condition initiale v au temps $t_0 = 0$. Le théorème suivant représente le principal résultat de [SS12].

Théorème 7. *Sur $(\Omega \times \mathbb{D} ; \mathcal{F} \otimes \mathcal{D})$, la mesure μ définie par*

$$\mu(d\omega, dv) = \mathbf{P}(d\omega) \delta_{u^\sharp(0, \cdot, \omega)}(dv)$$

est l'unique mesure laissant invariante la transformation

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \times \mathbb{D} \\ (\omega, v) &\longrightarrow (\theta^t \omega, S_\omega^t(v)) \end{aligned}$$

ayant pour projection \mathbf{P} sur (Ω, \mathcal{F}) .

En guise de conclusion, notons que les techniques employées sont certes bien adaptées au cas d'un bruit additif mais ne sont très certainement d'aucun secours pour un terme de force est modélisé par un bruit multiplicatif. Dans ce contexte, même si l'existence et l'unicité sont bien maîtrisées (voir [BVW12, DV10, FN08]), l'étude de l'existence d'une mesure invariante demeure un problème difficile.

1.4 Un schéma d'approximation numérique pour une équation aux dérivées partielles avec un bruit multiplicatif

Les résultats présentés dans cette section proviennent de [Sau12b].

On considère l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante

$$p(t, x) = p_0(x) + \int_0^t \mathcal{L}p(s, x) ds + \int_0^t c(x)p(s, x) ds + \sum_{l=1}^n \int_0^t h^l(s)p(s, x) dB_s^l \quad (1.18)$$

pour $0 \leq t \leq T$. Le processus $B = (B_t^1, \dots, B_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien n -dimensionnel. L'opérateur \mathcal{L} est donné par

$$\mathcal{L}p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

avec

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x),$$

où la matrice de diffusion σ est définie de \mathbf{R}^d dans $\mathbf{R}^{d \times m}$ et $b : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ est le coefficient de dérive. La condition initiale p_0 , les fonctions c , σ et b sont supposées être régulières. Ainsi l'équation (1.18) a une unique solution forte qui est elle-même régulière.

Le but de ce travail est de proposer un schéma numérique d'approximation pour p . Le problème de l'approximation numérique d'une telle équation a été étudié par de nombreux auteurs. Les idées qui nous ont amené à proposer un nouveau schéma sont de deux types.

- Tout d'abord, on souhaite proposer un schéma qui sépare la simulation du bruit B et celle de quantités liées à l'opérateur différentiel du second ordre \mathcal{L} . Cette idée est aussi le fil directeur de la méthode présentée dans [LMR97] dans un contexte de filtrage. Dans ces travaux, les auteurs ont obtenu un schéma qui permet de faire de nombreux calculs (des approximations d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis) avant de procéder à la partie stochastique de l'approximation de p .
- De plus on a souhaité utiliser la méthode de quantification pour une diffusion markovienne afin d'avoir une solution approchée des équations aux dérivées partielles qui pourraient intervenir dans notre étude. Notre idée est donc de remplacer la méthode des éléments finis par un schéma basé sur un algorithme de programmation dynamique.

L'utilisation de la méthode de quantification va devenir claire après la remarque qui suit. Nous allons utiliser une transformation de type Doss-Sussmann (voir [Dos77, Sus78] pour le cas des équations différentielles stochastiques et aussi [DLM10] où une telle transformation est utilisée pour une équation aux dérivées partielles stochastique). Plus précisément on obtient la formule suivante :

$$p(t, x) = \exp \left(\sum_{l=1}^n \int_0^t h^l(s) dB_s^l \right) \times v(t, x) \quad (1.19)$$

avec v la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$dv(t, x) = \mathcal{L}v(t, x)dt + \left(c(x) - 1/2 \sum_{l=1}^n (h^l(t))^2 \right) v(t, x)dt. \quad (1.20)$$

L'équation de v est déterministe. On peut donc la simuler avant de procéder aux simulations de la partie stochastique liée au mouvement brownien B . Une fois effectuée la simulation de la partie déterministe de notre futur schéma (celle qui correspond à v) on approximera p via la formule (1.19).

Il reste à décrire la méthode choisie pour simuler v . L'algorithme de quantification est basé sur la généralisation de la formule de Feynman-Kac donnée par les équations différentielles stochastiques rétrogrades (voir [PP90]). Cette méthode a été principalement utilisée pour étudier des problèmes non linéaires liés à des équations aux dérivées partielles avec réflexion. Ces équations sont en effet en relation avec des problèmes de prix d'options américaines (voir [BP03a, BP03b, BPP01, BPP03] pour les applications de la quantification en mathématiques financières). Le schéma que l'on propose comporte plusieurs étapes que l'on décrit brièvement. Tout d'abord, on remplace la diffusion X associée à l'opérateur \mathcal{L} par son schéma d'Euler de pas $1/n$. Ensuite, on projette le schéma sur une grille de \mathbf{R}^d comportant N points avec $N = n^{(3d+2)/2}$ (voir la sous-section 3.2 de [Sau12b] pour plus de détails). Le principe de programmation dynamique utilise les probabilités de transitions des projections du schéma d'Euler. Mais bien entendu, nous ne sommes pas censés connaître ces probabilités de transitions. Elles seront donc simulées par une méthode de Monte-Carlo qui nous donnera des probabilités de transitions empiriques après avoir lancé M simulations de copies indépendantes du schéma d'Euler. On ne rentrera pas plus dans les détails dans ce mémoire. Les méthodes sont classiques au vu des travaux [BP03a, BP03b, Bal04]. Cependant, une description détaillée est donnée dans la section 3 de [Sau12b]. L'erreur commise sera décomposée en différentes parties correspondant aux étapes précédemment décrites. Notre algorithme est assez coûteux en temps de calcul mais heureusement tous ces calculs peuvent être faits en amont, avant de procéder à la simulation du bruit. C'est en utilisant la formule (1.19) que l'on obtiendra une approximation de p après avoir simulé le mouvement brownien B .

L'analyse de l'erreur est le sujet du théorème 5 de [Sau12b] que l'on décrit maintenant. On note $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ avec $t_k = kT/n$ les points de discrétisation temporelle. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on calcule par récurrence des quantités $(\tilde{p}_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ et on obtient l'erreur suivante

$$\max_{0 \leq k \leq n} \mathbf{E} \left(|p(t_k, x) - \tilde{p}_k(x)| \right) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} + \frac{C}{\sqrt{M}}.$$

À noter que la méthode de quantification a été utilisée dans un problème de filtrage dans [GPPP06]. Malheureusement la transformation de Doss-Sussmann qui permet d'obtenir (1.19) n'est pas applicable dans le cas de l'équation de Zakai intervenant dans la théorie du filtrage linéaire. En effet, l'équation de Zakai est une équation du type

$$\begin{cases} dp(t, x) &= \mathcal{L}p(t, x)dt + \sum_{l=1}^n h^l(x)p(t, x)dY_t^l, \\ u(0, x) &= p_0(x). \end{cases} \quad (1.21)$$

Le bruit est encore multiplicatif mais le coefficient dépend maintenant de la variable spatiale x . La transformation telle que je l'ai décrite dans la proposition 1 de [Sau12b] ne s'applique plus car

intuitivement on ne pourra plus commuter la quantité $\exp\left(\sum_{l=1}^n h^l(x)B_t^l\right)$ avec l'opérateur \mathcal{L} . Toutefois il existe des méthodes de type Doss-Sussmann qui permettent de passer d'une équation aux dérivées partielles du type de l'équation de Zakaï (1.21) à une équation aux dérivées partielles (voir par exemple [BM01b]). Dans ces méthodes intervient alors une équation aux dérivées partielles à coefficients aléatoires. Il n'est pas évident que la méthode de quantification s'applique alors pour l'équation obtenue.

Le travail présenté peut donc être considéré comme un travail introductif à l'utilisation combinée de la méthode de quantification et des transformations de type Doss-Sussmann. Remarquons aussi que notre méthode peut s'appliquer à d'autres types d'équations aux dérivées partielles stochastiques pourvu que le terme stochastique soit linéaire et que l'opérateur différentiel soit le générateur d'un processus de Markov.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques fractionnaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire. Les propriétés étudiées seront de nature assez différente. Elles iront de la différentiabilité au sens de Malliavin à l'estimation non paramétrique du coefficient de dérive en passant par les inégalité de transport et le retournement du temps. Les publications liées à ce chapitre sont [NS09, Sau12d, DS07, Sau12e, Sau12c].

Les équations considérées seront principalement du type

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t b^i(X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(X_s) dB_s^{H,j}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.1)$$

où les processus $B^{H,j}$, $j = 1, \dots, m$, sont des mouvements browniens fractionnaires indépendants et $x_0 \in \mathbf{R}^d$ est la donnée initiale du processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

Comme chaque mouvement brownien $B^{H,j}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance $\mathbf{E}(B_s^{H,j} B_t^{H,j}) = R_H(s, t)$, avec

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2} \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad (2.2)$$

il s'ensuit que $\mathbf{E}(|B_t^{H,j} - B_s^{H,j}|^2) = |t - s|^{2H}$. Ainsi le mouvement brownien fractionnaire a des trajectoires α -höldérienne pour $\alpha \in (0, H)$. L'intégrale stochastique dans (2.1) pourra donc être considérée comme une intégrale de Riemann-Stieltjes trajectorielle (voir [You36]). Plus précisément si on suppose que σ est régulière (ses dérivées partielles sont bornées et höldériennes d'ordre $\lambda > 1/H - 1$), et que b est lipschitzienne alors il existe une unique solution à l'équation (2.1) ayant des trajectoires höldérienne d'ordre $H - \varepsilon$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$. Ce résultat a été démontré dans [Lyo94] dans le cas $b = 0$ en utilisant les p -variations. La théorie des trajectoires rugueuses introduite dans [LQ02] a été utilisée par [CQ02] afin d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation (2.1) dans le cas $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Dans les travaux qui vont être décrits ci-après, la théorie des trajectoires rugueuses ne sera pas utilisée. Je me suis cantonné à l'utilisation du fait que l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport au mouvement brownien fractionnaire peut être exprimée comme une intégrale de Lebesgue après avoir utilisé une formule d'intégration par parties (voir [Zäh98]). Grâce à cette formule, il a été établi dans [NR02] un résultat d'existence et d'unicité pour une classe d'équation du type (2.1) pour $H > 1/2$. Les travaux présentés dans les sections

suivantes rentrent dans ce cadre.

2.1 Calcul de Malliavin

Dans cette première section, j'expose un travail en collaboration avec David Nualart [NS09] qui fut mon premier travail sur la thématique du mouvement brownien fractionnaire.

Comme l'intégration par rapport au mouvement brownien fractionnaire est une intégration trajectorielle, une grande partie des arguments sera de nature déterministe. On commencera en effet par montrer la régularité par rapport à des fonctions qui dirigent une équation déterministe analogue à (2.1). La différentiabilité de la solution de (2.1) dans la direction de l'espace de Cameron-Martin en découlera. On établira enfin l'absolue continuité de la loi de X_t pour $t > 0$.

Équation différentielle (déterministe) dirigée par des fonctions höldériennes

On commence par donner quelques précisions sur le type d'intégrale qui sera considéré. On note $W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions mesurables $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ telles que

$$\|f\|_{\alpha,1} := \sup_{0 \leq t \leq T} \left(|f(t)| + \int_0^t \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^{\alpha+1}} ds \right) < \infty .$$

L'espace $W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ sera l'espace des fonctions mesurables $g : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ telles que

$$\|g\|_{1-\alpha,2} := \sup_{0 \leq s < t \leq T} \left(\frac{|g(t) - g(s)|}{(t - s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(y) - g(s)|}{(y - s)^{2-\alpha}} dy \right) < \infty .$$

Si $C^\lambda(0, T; \mathbf{R}^d)$ désigne les fonctions λ -höldériennes de $[0, T]$ dans \mathbf{R}^d (on notera $\|\cdot\|_\lambda$ la norme naturelle sur cet espace), alors pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $1 - \alpha + \varepsilon \leq 1$ on a les inclusions

$$C^{\alpha+\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d) \subset W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$$

et

$$C^{1-\alpha+\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^m) \subset W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m) \subset C^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m) .$$

On peut maintenant rappeler l'intégrale de Stieltjes généralisée introduite par [Zäh98]. Pour $g \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R})$ l'intégrale

$$\int_0^T f_t dg_t = (-1)^\alpha \int_0^T (D_{0+}^\alpha f)(t) (D_{T-}^{1-\alpha} g_{T-})(t) dt, \quad (2.3)$$

est définie via les opérateurs de dérivation fractionnaire

$$D_{0+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_0^x \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right),$$

et

$$D_{T-}^\alpha g_{T-}(x) = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{g(x) - g(T)}{(T-x)^\alpha} + \alpha \int_x^T \frac{g(x) - g(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right).$$

On pourra se reporter à [SKM93] pour plus de détails sur ces opérateurs. L'intégrale généralisée (2.3) coïncide avec l'intégrale de Riemann-Stieltjes lorsque $f \in C^{\alpha+\varepsilon}(0, T; \mathbf{R})$ (voir [Zäh98]).

L'introduction des espaces $W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R})$ et $W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R})$ est justifiée par l'estimation suivante : si $g \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ et $f \in W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R})$ pour $0 < \alpha < 1/2$ alors il existe une constante $c_{\alpha, T}$ telle que

$$\left\| \int_0^t f_s dg_s \right\|_{1-\alpha} \leq c_{\alpha, T} \|g\|_{1-\alpha, 2} \|f\|_{\alpha, 1} .$$

Ce résultat provient de [NR02] et est clairement le point de départ si on veut faire des estimations sur ces intégrales afin de développer un argument de type point fixe pour l'existence et l'unicité de l'équation. Comme mentionné plus haut, ce n'est bien entendu pas la seule méthode pour traiter ce problème.

On se fixe $\alpha \in (0, 1/2)$ et pour $g \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ on considère l'équation différentielle déterministe

$$x_t^i = x_0^i + \int_0^t b^i(x_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(x_s) dg_s^j, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.4)$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^d$. L'équation (2.4) a une unique solution $x \in W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$ qui est $(1-\alpha)$ -Höldérienne. Ce résultat provient de [NR02] sous les hypothèses de régularité :

- $b^i, \sigma^{ij} \in C_b^1$ (C_b^k désigne les fonctions k fois continûment dérivables à dérivées bornées)
- les dérivées partielles de σ^{ij} sont höldériennes d'ordre $\lambda > \frac{1}{H} - 1$.

Le lemme suivant est le premier pas vers la preuve de la différentiabilité de l'application $g \mapsto x(g)$ où $x(g)$ est la solution de (2.4).

Lemme 2. *Soit x la solution de (2.4). L'opérateur*

$$F : W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m) \times W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$$

défini par

$$(h, x) \mapsto F(h, x) := x - x_0 - \int_0^\cdot b(x_s) ds - \int_0^\cdot \sigma(x_s) d(g_s + h_s) \quad (2.5)$$

est Fréchet-différentiable. On a pour $i = 1, \dots, d$

$$D_1 F(h, x)(k)_t^i = - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(x_s) dk_s^j, \quad (2.6)$$

$$D_2 F(h, x)(v)_t^i = v_t^i - \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_k b(x_s) v_s^k ds - \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t \partial_k \sigma^{ij}(x_s) v_s^k d(g_s^j + h_s^j), \quad (2.7)$$

avec (h, x) et (k, v) dans $W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m) \times W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$.

Grâce à ce lemme, on peut établir l'expression de la dérivée de $g \mapsto x(g)$ dans une direction $h \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$.

Proposition 3. *L'application $g \mapsto x(g)$ de $W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ dans $W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$ est Fréchet-différentiable et pour tout $h \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ sa dérivée dans la direction h est donnée par*

$$D_h x_t^i = \sum_{j=1}^m \int_0^t \Phi_t^{ij}(s) dh_s^j, \quad (2.8)$$

et pour $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, m, 0 \leq s \leq t \leq T, s \mapsto \Phi_t^{ij}(s)$ vérifie l'équation :

$$\Phi_t^{ij}(s) = \sigma^{ij}(x_s) + \sum_{k=1}^d \int_s^t \partial_k b^i(x_u) \Phi_u^{kj}(s) du + \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^m \int_s^t \partial_k \sigma^{il}(x_u) \Phi_u^{kl}(s) dg_u^l, \quad (2.9)$$

et $\Phi_t^{ij}(s) = 0$ si $s > t$.

Un résultat analogue est établi pour les dérivées d'ordre supérieur dans [NS09, Prop. 5]. La régularité de l'application d'Itô $g \mapsto x(g)$ a aussi été étudiée dans [LL06] en terme de différentiabilité au sens de Fréchet-Gâteaux. La preuve de la proposition 3 repose sur une application du théorème des fonctions implicites et suit un schéma classique.

Démonstration. Comme $x(g)$ est solution de (2.4), on a $F(0, x(g)) = 0$. D'après le lemme 2, F est Fréchet-différentiable. Afin d'appliquer le théorème des fonctions implicites, on doit vérifier que $D_2F(0, x)$ est un homéomorphisme linéaire de $W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$ dans $C^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^d)$ (par le théorème de l'application ouverte, il sera suffisant de montrer qu'il est bijectif et continu). On utilise ensuite une généralisation du théorème d'existence et d'unicité pour une equation différentielle linéaire du type

$$y_t = w_t + \int_0^t B_s y_s ds + \int_0^t S_s y_s dg_s,$$

où $w \in C^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^d)$ est une donnée du problème (voir [NS09, Prop. 2]). Cette propriété implique que

$$D_2F(0, x)(v)_t^i = v_t^i - \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_k b^i(x_s) v_s^k ds - \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t \partial_k \sigma^{ij}(x_s) v_s^k dg_s^j$$

est injectif.

On applique ensuite cette même propriété après s'être donné $w \in C^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^d)$. Il existe alors $v \in W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$ tel que $w = D_2F(0, x)(v)$, et ainsi $D_2F(0, x)$ est surjectif. On savait déjà qu'il était continu et pas le théorème des fonctions implicites, $g \mapsto x(g)$ est continûment Fréchet-différentiable et $Dx = -D_2F(0, x)^{-1} \circ D_1F(0, x)$. De plus pour tout $k \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$, $-Dx(k)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$w_t^i = -Dx(k)_t^i + \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_k b(x_s) Dx(k)_s^k ds + \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t \partial_k \sigma^{ij}(x_s) Dx(k)_s^k dg_s^j$$

où $w_t^i = D_1F(0, x)(k)_t^i = -\sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(x_s) dk_s^j$.

La dernière partie de la proposition est obtenue en intégrant (2.9) contre une fonction $h \in W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ et en utilisant un théorème de Fubini pour des intégrales de Riemann-Stieltjes. \square

Pour exploiter ces résultats déterministes dans le contexte des trajectoires du mouvement brownien fractionnaire, il nous faut introduire l'espace de Cameron-Martin fractionnaire qui représentera les directions par rapport auxquelles on pourra dériver.

Application à l'équation différentielle stochastique

Comme les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire appartiennent presque-sûrement à $C^{1-\alpha+\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^m) \subset W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ si $\varepsilon < H + \alpha - 1$, on peut appliquer les résultats du

paragraphe précédent (la proposition 3 par exemple si on ne s'intéresse qu'à la dérivée première). Si on note $X(\omega) = (X_t(\omega))_{0 \leq t \leq T}$ la solution de l'équation différentielle stochastique (2.1), on obtient que $\omega \mapsto X(\omega)$ est Fréchet-différentiable de $W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ dans $W_1^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$. Pour interpréter cette différentiabilité en terme de calcul des variations stochastiques, il faut, en quelque sorte, rendre les dérivées directionnelles. C'est pour cela qu'on introduit \mathcal{H}_H la version fractionnaire de l'espace de Cameron-Martin. Il est défini par $\mathcal{H}_H := \mathcal{K}_H(L^2(0, T; \mathbf{R}^m))$ où l'opérateur \mathcal{K}_H est défini sur $L^2(0, T; \mathbf{R}^m)$ par

$$(\mathcal{K}_H h)(t) := \int_0^t K_H(t, s) h(s) ds . \quad (2.10)$$

On rappelle que le noyau de carré intégrable $K_H(\cdot, \cdot)$ est donné par

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du \quad (2.11)$$

et est tel que

$$\mathbf{E}(B_t^H B_s^H) = \int_0^{t \wedge s} K_H(t, r) K_H(s, r) dr .$$

Soit maintenant \mathcal{E} l'espace des fonctions en escalier de $[0, t]$ dans \mathbf{R}^m . L'espace de Hilbert \mathcal{H} est la fermeture de \mathcal{E} par rapport au produit scalaire

$$\langle (1_{[0, t_1]}, \dots, 1_{[0, t_m]}), (1_{[0, s_1]}, \dots, 1_{[0, s_m]}) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^m R_H(t_i, s_i).$$

L'opérateur $\mathcal{K}_H^* : \mathcal{E} \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{R}^m)$ est défini par

$$\mathcal{K}_H^* ((1_{[0, t_1]}, \dots, 1_{[0, t_m]})) = (K_H(t_1, \cdot), \dots, K_H(t_m, \cdot)) .$$

On a pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{K}_H^* \varphi, \mathcal{K}_H^* \psi \rangle_{L^2(0, T; \mathbf{R}^m)} = \mathbf{E} \left(B^H(\varphi) B^H(\psi) \right) ,$$

où l'isométrie $\varphi \mapsto B^H(\varphi)$ est l'extension de l'isométrie $(1_{[0, t_1]}, \dots, 1_{[0, t_m]}) \mapsto \sum_{i=1}^m B_{t_i}^{H, i}$ entre \mathcal{H} et l'espace gaussien engendré par B^H . Cette isométrie est l'opérateur d'intégration de fonctions déterministes par rapport au mouvement brownien fractionnaire.

Lorsque $H = 1/2$, $K_H(t, s) = 1_{[0, t]}(s)$, \mathcal{K}_H^* est l'application identité sur $L^2(0, T; \mathbf{R}^m)$, et \mathcal{H}_H est l'espace des fonctions absolument continues, nulles en 0, avec une dérivée faible de carré intégrable.

Il reste à introduire vers quelle direction seront dirigées nos dérivées. Dans ce but, on note $\mathcal{R}_H = \mathcal{K}_H \circ \mathcal{K}_H^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_H$ l'opérateur

$$\mathcal{R}_H \varphi = \int_0^\cdot K_H(\cdot, s) (\mathcal{K}_H^* \varphi)(s) ds .$$

À ce stade, on voit que pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, $\mathcal{R}_H \varphi$ est höldérien d'ordre H car

$$(\mathcal{R}_H \varphi)^i(t) = \int_0^T (\mathcal{K}_H^* 1_{[0, T]})^i(s) (\mathcal{K}_H^* \varphi)^i(s) ds = \mathbf{E} \left(B_t^{H, i} B^{H, i}(\varphi) \right) ,$$

et donc

$$\left| (\mathcal{R}_H \varphi)^i(t) - (\mathcal{R}_H \varphi)^i(s) \right| \leq \left(\mathbf{E} \left(|B_t^{H,i} - B_s^{H,i}|^2 \right) \right)^{1/2} \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}} |t - s|^H.$$

Ainsi $\mathcal{H}_H \subset C^H(0, T; \mathbf{R}^m) \subset W_2^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^m)$ et donc les dérivées itérées suivantes existent bien

$$D_{\mathcal{R}_H \varphi_1, \dots, \mathcal{R}_H \varphi_n} X_t^i = \frac{d}{d\varepsilon_1} \dots \frac{d}{d\varepsilon_n} X_t^i(\omega + \varepsilon_1 \mathcal{R}_H \varphi_1 + \dots + \varepsilon_n \mathcal{R}_H \varphi_n) \Big|_{\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 0}, \quad (2.12)$$

pour $\varphi_i \in \mathcal{H}$. On a donc naturellement le résultat suivant.

Théorème 8. *Si $H > 1/2$ et les coefficients sont réguliers alors la solution de l'équation (2.1) est presque-sûrement infiniment différentiable dans la direction de l'espace de Cameron-Martin \mathcal{H}_H .*

Mettons maintenant en relation les dérivées directionnelles et les dérivées de Malliavin. On rappelle que si F est une variable cylindrique de la forme

$$F = f(B(\varphi_1), \dots, B(\varphi_m))$$

avec $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\varphi_i \in \mathcal{H}$, alors la dérivée de Malliavin DF est la variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{H} définie par

$$\begin{aligned} \langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^m \partial_i f(B(\varphi_1), \dots, B(\varphi_m)) \langle \varphi_i, h \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} f(B(\varphi_1) + \varepsilon \langle \varphi_1, h \rangle_{\mathcal{H}}, \dots, B(\varphi_m) + \varepsilon \langle \varphi_m, h \rangle_{\mathcal{H}}) \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Le lien avec (2.12) provient de l'identité

$$B(\varphi_1)(\omega + \varepsilon \mathcal{R}_H h) = B(\varphi_1)(\omega) + \varepsilon \langle \varphi_1, h \rangle_{\mathcal{H}}$$

qui est elle-même une conséquence de

$$(\mathcal{R}_H \varphi)(t) = \int_0^t \left(\int_0^u \frac{\partial K_H}{\partial u}(u, s) (\mathcal{K}_H^* \varphi)(s) ds \right) du. \quad (2.13)$$

D'après (2.8) de la proposition 3, on peut alors écrire trajectoriellement que pour $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$,

$$D_s^j X_t^i = \sigma^{ij}(X_s) + \sum_{k=1}^d \int_s^t \partial_k b^i(X_u) D_s^j X_u^k du + \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^m \int_s^t \partial_k \sigma^{il}(X_u) D_s^j X_u^k dB_u^l,$$

si $s \leq t$ et 0 si $s > t$.

Remarquons que nous n'avons pas d'estimation sur les moments des dérivées de Malliavin car jusqu'alors on a travaillé trajectoriellement. On ne peut donc pas savoir si elles appartiennent à

l'espace $\mathbb{D}^{k,p}$, la fermeture de l'espace des variables aléatoires cylindriques par rapport à la norme

$$\|F\|_{k,p} = \left[\mathbf{E}(|F|^p) + \sum_{j=1}^k \mathbf{E} \left(\|D^j F\|_{\mathcal{H}^{\otimes j}}^p \right) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dans [NS09], on se restreindra à l'espace $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}$ qui est l'ensemble des variables aléatoires F telles qu'il existe une suite $\{(\Omega_n, F_n), n \geq 1\}$ vérifiant $\Omega_n \uparrow \Omega$ p.s., $F_n \in \mathbb{D}^{k,p}$ et $F = F_n$ p.s. sur Ω_n .

On montrera grâce à un résultat de Kusuoka (voir [Kus82, Th. 5.2] ou [Nua06, Prop. 4.1.3]) qui stipule que si une variable aléatoire est continûment différentiable (moralement au sens de Fréchet), alors elle appartient à $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{1,2}$. À noter que ce résultat ne s'applique que sur un espace de Wiener au sens de Gross ce qui est le cas de l'espace $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbf{P})$ car $\mathcal{R}_H : \mathcal{H} \rightarrow \Omega$ injecte \mathcal{H} de manière dense dans Ω et pour tout $\varphi \in \Omega^* \subset \mathcal{H}$ on a

$$\mathbf{E} \left(e^{i\langle B, \varphi \rangle} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \right).$$

L'appartenance aux espaces $\mathbb{D}^{k,p}$ sera montrée par la suite dans [HN07, HP11] en utilisant des majorations plus fines sur les équations déterministes (voir aussi la section 2.2). Cela dit, la principale motivation étant de montrer l'existence d'une densité pour la loi de X_t sous une hypothèse d'ellipticité forte, travailler avec les espaces $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{k,p}$ sera suffisant.

On obtient le résultat suivant :

Théorème 9. *Lorsque $H > 1/2$ et $b^i, \sigma^{ij} \in C_b^3$, on suppose l'hypothèse de non dégénérescence sur le coefficient σ :*

(H) *l'espace vectoriel engendré par $\{(\sigma^{1j}(x_0), \dots, \sigma^{dj}(x_0)), 1 \leq j \leq m\}$ est \mathbf{R}^d .*

alors pour tout $t > 0$, la loi du vecteur aléatoire X_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^d .

On termine ce paragraphe par quelques commentaires bibliographiques. Bien que la régularité de l'application d'Itô $g \mapsto x(g)$ a aussi été étudiée dans [LL06], l'existence de la densité pour une équation différentielle stochastique fractionnaire n'a pas été abordée dans [LL06]. On pourra aussi se reporter à [CFV09, CF10] pour une étude des équations via la théorie des trajectoires rugueuses. On notera enfin que le cas d'une équation différentielle stochastique fractionnaire uni-dimensionnelle a été traité dans [NS06]. Le théorème 9 a été utilisé dans [BH07] pour montrer la régularité de la densité sous des hypothèses d'hypoellipticité du type Hörmander. Ce résultat nécessite l'existence de moments pour les dérivées de Malliavin itérées, propriété établie dans [HN07, HP11].

2.2 Sur la distance entre les EDS browniennes et les EDS fractionnaires

Je me suis intéressé dans [Sau12d] à une étude qualitative des solutions des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire. Ces équations sont celles décrites par :

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t b^i(X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(X_s) dB_s^{H,j}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.14)$$

les processus $B^{H,j}$, $j = 1, \dots, m$ sont des mouvements browniens fractionnaires indépendants et $x_0 \in \mathbf{R}^d$ est la donnée initiale du processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$. On va étudier les comportements de la famille des solutions lorsque H varie entre $1/2$ et 1 et lorsque le coefficient de dérive et le coefficient de diffusion varient dans une famille de fonctions régulières.

Afin d'exposer une remarque préliminaire qui a motivé ce travail, on commence par rappeler que le processus $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ défini par

$$W_t = B^H \left((\mathcal{K}_H^*)^{-1} \left((\mathbb{1}_{[0,t]}, \dots, \mathbb{1}_{[0,t]}) \right) \right)$$

est un mouvement brownien (classique) et B^H jouit de la représentation intégrale suivante :

$$B_t^{H,i} = \int_0^t K_H(t,s) dW_s^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.15)$$

où le noyau de carré intégrable K_H est défini par l'expression (2.11). Cette correspondance est appelée principe de transfert.

Considérons maintenant le processus $\bar{X} = (\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ solution de l'équation différentielle stochastique dirigée par le mouvement brownien W

$$\bar{X}_t^i = x_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{i,j}(\bar{X}_s) dW_s^j + \int_0^t b^i(\bar{X}_s) ds. \quad (2.16)$$

Si on se place dans un contexte unidimensionnel ($d = m = 1$) et que le coefficient de diffusion est identiquement égal à 1 ($\sigma(x) = 1$ pour tout x), on montre facilement que

$$|X_t - \bar{X}_t| \leq |B_t^H - B_t| + c \int_0^t |B_s^H - W_s| e^{c(t-s)} ds.$$

D'après [Dec05, Lemme 3.2], on sait que pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(0, T)$ et pour tout $H_1 > H_2 > 0$ on a

$$\left| \int_0^t K_{H_1}(t,s) f(s) ds - \int_0^t K_{H_2}(t,s) f(s) ds \right| \leq c |H_1 - H_2| \|f\|_{\mathbf{L}^2}$$

ce qui implique que

$$\mathbf{E} \int_0^T |X_t - \bar{X}_t|^2 dt \leq c |H - 1/2|^2.$$

Ainsi, dans ce cas simple, lorsque H est proche de $1/2$, la solution de l'équation (2.14) est proche de celle dirigée par le mouvement brownien W qui est naturellement associé au mouvement brownien fractionnaire B^H par le principe de transfert. Il n'est pas immédiat que cette propriété (ou une propriété allant dans ce sens) demeure vraie lorsque le coefficient de diffusion est quelconque.

Afin de présenter le principal résultat de [Sau12d], on note \mathcal{C}_c^k l'ensemble des fonctions φ , k fois dérivables et vérifiant $\sum_{i=1}^k \|\varphi^{(i)}\|_\infty \leq c$. On considère une famille de mouvements browniens fractionnaires $(B^H)_{H \in [1/2, 1]}$, tous provenant d'un unique mouvement brownien W par le principe de transfert (par suite on a $B^{1/2} = W$). Pour $H > 1/2$, b et σ dans \mathcal{C}_c^2 , on note $(X_t(H, x_0, b, \sigma))_{0 \leq t \leq T}$

la solution de l'équation (2.14) :

$$X_t^i(H, x_0, b, \sigma) = x_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(X_s(H, x_0, b, \sigma)) dB_s^{Hj} + \int_0^t b^i(X_s(H, x_0, b, \sigma)) ds .$$

En toute généralité, on peut distinguer la régularité de b et σ et même avoir des régularités différentes selon l'ordre de dérivation, mais cela alourdirait inutilement la rédaction. La version publiée [Sau12d] propose des énoncés plus complets. On étudie l'ensemble des solutions de (2.14) lorsque les mouvements browniens ont des coefficients de Hurst dans $[H_0, H_1]$ et lorsque $b \in \mathcal{C}_c^1$ et $\sigma \in \mathcal{C}_c^2$ et on introduit donc

$$\mathcal{S}_c^{H_0, H_1} = \left\{ \left(X_t(H, x_0, b, \sigma) \right)_{0 \leq t \leq T} : H_0 \leq H \leq H_1, |x_0| \leq c, \right. \\ \left. b^i \in \mathcal{C}_c^1, \sigma^{ij} \in \mathcal{C}_c^2, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, m \right\} .$$

Dans la section 1.1, on a utilisé un critère de compacité sur l'espace de Wiener-Sobolev pour obtenir la compacité d'une famille de solution d'équations aux dérivées partielles stochastiques. Ici on reste dans le même esprit et établit que l'on peut trouver un recouvrement de $\mathcal{S}_c^{H_0, H_1}$ par des boules de $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)$ centrées sur des solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien W . Ainsi les solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par une famille de browniens fractionnaires ne sont (en un certain sens) pas si éloignées que cela d'un nombre fini de solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien d'où proviennent nos mouvement browniens fractionnaires. On précise cette propriété dans le théorème suivant :

Théorème 10. *Soit $c > 0$ et $1/2 < H_0 \leq H_1 < 1$ fixés. Il existe $R > 0$, un entier N et pour $k = 1, \dots, N$ il existe*

- des valeurs initiales $x_{(k),0} \in \mathbf{R}^d$ telle que $|x_{(k),0}| \leq c$,
- des coefficients de dérive $b_{(k)}^i \in \mathcal{C}_c^1$ pour $i = 1, \dots, d$,
- des coefficients de diffusion $\sigma_{(k)}^{ij} \in \mathcal{C}_c^2$ pour $i = 1, \dots, d$ et $j = 1, \dots, m$

tel que

$$\mathcal{S}_c^{H_0, H_1} \subset \bigcup_{k=1}^N \{ Z \in \mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega) : \|Z - \bar{X}_{(k)}\|_{\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)} < R \} ,$$

où le processus $\bar{X} = (\bar{X}_{(k),t})_{0 \leq t \leq T}$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\bar{X}_{(k),t}^i = x_{(k),0}^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{(k)}^{ij}(\bar{X}_{(k),s}) dW_s^j + \int_0^t b_{(k)}^i(\bar{X}_{(k),s}) ds .$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise principalement deux ingrédients. Le premier est une approximation de la solution d'équation du type (2.14) obtenue en remplaçant la processus B^H par son approximation par des lignes polygonales. Le second argument, et ce fut aussi en partie une des motivations de ce travail, est l'utilisation du théorème de relative compacité sur l'espace de Wiener (voir Théorème 1) qui a été rappelé dans la section 1.1. On montre ainsi que

Proposition 4. *Pour tout $c > 0$ et $1/2 < H_0 \leq H_1 < 1$, l'ensemble $\mathcal{S}_c^{H_0, H_1}$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)$.*

La version classique de cette proposition dans le cas brownien est établie dans [DPMN92]. Pour appliquer le théorème de relative compacité 1, il faut des estimations sur les dérivées de Malliavin de la solution de (2.14), estimation que nous ne savions pas faire lors de la rédaction de [NS09] (article décrit dans la section 2.1 précédente). Cependant, en utilisant les techniques initiées dans [HN07] on pourra obtenir de bonnes estimations sur les dérivées de Malliavin. L'uniformité par rapport à $H \in [H_1, H_2]$ est aussi un souci technique qu'il faut garder en tête lors des estimations.

Il serait très intéressant, mais assez difficile, d'obtenir plus d'informations sur le nombre N et la rayon R des boules de $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)$ qui recouvrent $\mathcal{S}_c^{H_0, H_1}$.

2.3 Retournement du temps pour un mouvement brownien fractionnaire avec dérive

L'article [DS07] présenté dans cette section a été réalisé en collaboration avec Sébastien Darses qui était alors étudiant en thèse sous la direction de Jacky Cresson.

Le problème de retournement du temps pour une diffusion brownienne consiste principalement à savoir :

- si le processus retourné est encore une diffusion ;
- comment calculer les coefficients de cette nouvelle diffusion.

Dans le cas des diffusions markoviennes Haussmann et Pardoux ont utilisé dans [HP86] les solutions faibles d'équations de Kolmogorov, une étude basée sur le grossissement de filtration est menée dans [Par86] et Millet, Nualart et Sanz ([MNS89]) ont utilisé une formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin afin d'obtenir les expressions des coefficients de la diffusion retournée. Tous ces travaux succèdent à celui de Föllmer ([Föl86]) dans lequel est établi une formule pour le coefficient de dérive pour une diffusion retournée non markovienne avec un coefficient de diffusion constant. On rappelle ce résultat qui est le principal outil utilisé dans [DS07].

Théorème 11. ([Föl86]) *Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé filtré on considère X le mouvement brownien avec dérive défini par*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + W_t \quad (2.17)$$

où $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien et le coefficient $(b_t)_{0 \leq t \leq T}$ est \mathcal{F}_t -adapté et satisfait la condition de Novikov

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T b_s^2 ds \right\} \right] < \infty. \quad (2.18)$$

On note $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration engendrée par le processus retourné $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $\bar{X}_t = X_{T-t}$. Alors \bar{X} est aussi un mouvement brownien avec dérive : il existe un processus $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -adapté $(\widehat{b}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et un $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ -mouvement brownien $(\widehat{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \widehat{b}_s ds + \widehat{W}_t.$$

Si le processus b est régulier au sens de Malliavin, alors on a une forme explicite de \widehat{b} (voir [DS07, Th. 8] ou [Föl86, Th. 4.7]).

Le principal résultat de [DS07] a été de généraliser le théorème 11 aux processus avec dérive du type

$$Y_t^H = y + \int_0^t u_s^H ds + B_t^H, \quad (2.19)$$

où $(u_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{F}_t -adapté. On considère une famille de mouvements browniens fractionnaires $(B^H)_{1/2 \leq H < 1}$ tous transférés d'un unique mouvement brownien W . On a donc pour tout $H > 1/2$

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s \quad (2.20)$$

avec le noyau K_H qui a été déjà défini dans (2.11). La question naturelle est donc de savoir si le processus retourné de Y^H est encore un mouvement brownien fractionnaire avec dérive. Dans l'affirmative, est-ce que le coefficient de dérive obtenu après retournement du temps étend continûment celui obtenu lorsque $H = 1/2$, après retournement de temps pour le processus $Y^{1/2}$ défini par

$$Y_t^{1/2} = y + \int_0^t u_s ds + W_t? \quad (2.21)$$

On se place sous les hypothèses suivantes qui seront commentées un peu après :

- (i) pour tout $H \in [1/2, 1)$, le processus $b^H := \mathcal{K}_H^{-1}(\int_0^\cdot u_s^H ds)$ (où l'opérateur \mathcal{K}_H^{-1} est l'inverse de l'opérateur \mathcal{K}_H défini par (2.10)) satisfait la condition de Novikov (2.18),
- (ii) il existe $H_0 > 1/2$ tel que
 - $(u_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ a des trajectoires höldériennes d'ordre $H_0 - 1/2$, et il existe $\eta > H - \frac{1}{2}$ tel que $\mathbf{E}|u_t^H - u_s^H| \leq c|t - s|^\eta$
 - $\sup_{H \in [1/2, H_0]} \mathbf{E} \left[\int_0^T |b_t^H|^2 dt \right] < +\infty$
 - pour presque tout $t \in [0, T]$, $\lim_{H \downarrow \frac{1}{2}} \mathbf{E}|u_t^H - u_t| = 0$.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 12. *On se donne une famille de processus $(u^H)_{H \geq 1/2}$ qui vérifie les conditions (i) et (ii), et on considère $(Y^H)_{H \geq 1/2}$ la famille de processus définis par (2.19). Alors il existe une famille de processus continus $(\widehat{u}^H)_{H \geq 1/2}$ et une famille de mouvements browniens fractionnaires $(\widehat{B}^H)_{H \geq 1/2}$ telles que pour tout $H > 1/2$, le processus retourné $(\bar{Y}_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $\bar{Y}_t^H = Y_{T-t}^H$ satisfait*

$$\bar{Y}_t^H = \bar{Y}_0^H + \int_0^t \widehat{u}_s^H ds + \widehat{B}_t^H, \quad (2.22)$$

avec pour $t \in (0, T)$

$$\begin{cases} \lim_{H \downarrow 1/2} \widehat{B}_t^H = \widehat{B}^{1/2} = \widehat{W}_t & \text{dans } \mathbf{L}^1(\Omega), \\ \lim_{H \downarrow 1/2} \int_0^t \widehat{u}_s^H ds = \int_0^t \widehat{u}_s ds & \text{dans } \mathbf{L}^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.23)$$

Les processus \widehat{W} et \widehat{u} sont respectivement le mouvement brownien (respectivement le coefficient

de dérive), $\mathcal{F}^{\bar{Y}^{1/2}}$ -adapté, produits par le retournement de temps pour le processus $Y^{1/2}$ défini par

$$Y_t^{1/2} = y + \int_0^t u_s ds + W_t. \quad (2.24)$$

On précise que l'hypothèse (i) suffit pour construire le coefficient de dérive retourné et le mouvement brownien fractionnaire retourné associés à Y^H . L'hypothèse (ii) est utilisée pour la robustesse des formules par rapport au paramètre H , telle qu'elle est formulée dans (2.23). On peut ainsi remarquer que nos formules étendent continûment les formules classiques. Le diagramme suivant résume de manière informelle cette idée :

$$\begin{array}{ccc} dY_t^H = u_t^H dt + dB_t^H & \xrightarrow{H \downarrow 1/2} \lim & dY_t^{1/2} = u_t dt + dW_t \\ \downarrow R & & \downarrow R \\ d\bar{Y}_t^H = \hat{u}_t^H dt + d\hat{B}_t^H & \xrightarrow{H \downarrow 1/2} \lim & d\bar{Y}_t^{1/2} = \hat{u}_t dt + d\hat{W}_t, \end{array}$$

où R est la procédure de retournement du temps. L'intérêt de ce diagramme prend tout son sens avec la remarque suivante. On aurait pu écrire le processus \bar{Y}^H sous la forme

$$\bar{Y}_t^H = \bar{Y}_0^H + \int_{T-t}^T u_s^H ds + B_{T-t}^H - B_T^H. \quad (2.25)$$

Le processus \tilde{B}^H défini par $\tilde{B}_t^H := B_{T-t}^H - B_T^H$ est encore un mouvement brownien fractionnaire mais (2.25) ne satisfait pas celle obtenu dans le cas d'un mouvement brownien car

$$\tilde{B}_t^H \xrightarrow{H \downarrow 1/2} \frac{\mathbf{L}^1(\Omega)}{H \downarrow 1/2} W_{T-t} - W_T \neq \hat{W}_t.$$

Pour terminer, une application du théorème 12 est proposée (voir [DS07, Prop. 12]) lorsque Y^H est la solution de la diffusion fractionnaire

$$Y_t^H = y + \int_0^t u(Y_s^H) ds + B_t^H, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.26)$$

avec u une fonction bornée à dérivées premières bornées. Notons enfin que dans le cas brownien, les coefficients de dérive u et \hat{u} sont des dérivées de Nelson des processus $Y^{1/2}$ et $\bar{Y}^{1/2}$ (voir [Föl86, Nel67]). Ces dérivées stochastiques n'existent pas dans le cas fractionnaire (voir [DS07, Prop. 10]). Le retournement du temps de Y^H permet de dégager une notion de dérivée stochastique qui étend celle Nelson (voir la section 6 de [DS07]). Ces questions ont été approfondies dans la thèse de Sébastien Darses et dans [DN07b, DN07a, DNP09].

2.4 Inégalités de transport

La principale motivation de cette section décrivant l'article [Sau12e] est l'étude du comportement en temps long et en temps court de la solution de l'équation différentielle stochastique (2.1) dirigée par un mouvement brownien fractionnaire avec $H > 1/2$. Ces propriétés asymptotiques seront une conséquence de propriétés plus fines : les inégalités de concentration qui seront elles-mêmes une conséquence des inégalités de transport ou (inégalités de Talagrand).

Décrivons rapidement le type d'inégalité considérée. On se donne (E, d) un espace métrique muni d'une tribu \mathcal{B} de telle sorte que la distance d est $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable. Pour $p \in [1, +\infty]$ et deux probabilités μ et ν sur (E, \mathcal{B}) , la distance de Wasserstein entre μ et ν est définie par

$$W_p^d(\mu, \nu) = \inf \left(\int \int d(x, y)^p d\pi(x, y) \right)^{1/p}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les probabilités π sur $E \times E$ avec marginales μ et ν . L'entropie de ν par rapport à μ est

$$\mathbf{H}(\nu/\mu) = \begin{cases} \int \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu, & \text{si } \nu \ll \mu; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dira que la probabilité μ satisfait une L^p -inégalité de transport sur (E, d) s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute probabilité ν ,

$$W_p^d(\mu, \nu) \leq \sqrt{2CH(\nu/\mu)}.$$

On notera $\mu \in T_p(C)$ cette relation.

Dans un premier temps, on étudie la propriété $T_1(C)$ pour la loi \mathbf{P}_x de la solution $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ de l'équation :

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b^i(X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(s) dB_s^{Hj}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.27)$$

On suppose que b est lipschitzienne de constante de lipschitz L_b et qu'il existe $\beta > H$ tel que $\sigma \in C^\beta(0, T; \mathbf{R}^{d \times m})$, l'espace des fonctions β -höldérienne de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^{d \times m}$. On a le résultat suivant qui sera utilisé pour obtenir des comportements en temps court.

Théorème 13. *Pour tout $0 < T \leq (2L_b)^{-1} \wedge 1$, il existe une constante K indépendante de la donnée initiale x telle que \mathbf{P}_x satisfait la propriété $T_1(K\|\sigma\|_\beta T^{2H})$ sur $C(0, T; \mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbf{R}^d muni de la métrique d_∞ définie par $d_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{0 \leq t \leq T} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ pour $\gamma_1, \gamma_2 \in C(0, T; \mathbf{R}^d)$.*

Le cas unidimensionnel avec un coefficient de diffusion non linéaire est décrit par l'équation

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s^H. \quad (2.28)$$

Un résultat analogue est obtenu via la transformation de Lamperti qui permet de se ramener à une équation du type (2.27) (voir [Sau12e, Th. 2]). La restriction au temps court dans l'énoncé du théorème ci-dessus est en fait assez naturelle. En effet, si on prend $b = 0$ and $d = m = 1$ alors les processus X et B^H sont identiques. On peut caractériser la propriété $T_1(C)$ par un critère d'intégrabilité exponentielle (voir [DGW04, Th. 2.3]. Dans notre cas, $T_1(C)$ est équivalente à l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$C(\delta) = \mathbf{E} \left(\exp \left\{ \delta \|B^H - \tilde{B}^H\|_{0, T, \infty}^2 \right\} \right) < \infty$$

où B^H et \tilde{B}^H sont deux mouvements browniens fractionnaires indépendants. Clairement

$$C(\delta) \leq \mathbf{E} \left(\exp \left\{ \delta T^{2\beta} \|B^H - \tilde{B}^H\|_{0,T,\beta}^2 \right\} \right).$$

En utilisant l'inégalité de Garsia-Rodemich-Rumsey [GRR71], on montre le lemme suivant qui est une version du théorème de Fernique [Fer75].

Lemme 3. Soit $T > 0$, $1/2 < \beta < H < 1$. Alors pour tout $\alpha < 1/(128(2T)^{2(H-\beta)})$

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\alpha \|B^H\|_{0,T,\beta}^2 \right) \right] \leq (1 - 128\alpha(2T)^{2(H-\beta)})^{-1/2}. \quad (2.29)$$

Ainsi $C(\delta)$ sera finie dès que $\delta T^{2\beta} \times 128(2T)^{2(H-\beta)} \leq 1$ et donc T doit être petit.

Concernant la propriété $T_2(C)$, on suppose que le coefficient b dans l'équation (2.27) est tel qu'il existe $B \in \mathbf{R}$ avec

$$\langle x - y, b(x) - b(y) \rangle_{\mathbf{R}^d} \leq B|x - y|^2 \text{ pour tout } x, y \in \mathbf{R}^d.$$

Sous la condition de stabilité ci-dessus, on a le résultat suivant.

Théorème 14. La loi \mathbf{P}_x de la solution de (2.27) vérifie l'inégalité de Talagrand $T_2(C)$ sur l'espace métrique $C(0, T; \mathbf{R}^d)$ avec

- (a) $C = (2/|B|)HT^{2H-1}(1 \vee e^{(2B+|B|) \times T})\|\sigma\|_{0,T,\infty}^2$ pour la métrique d_∞ ;
- (b) $C = (2/B^2)HT^{2H-1}\|\sigma\|_{0,T,\infty}^2 c_{B,T}$ où

$$c_{B,T} := \begin{cases} \frac{e^{3BT}-1}{3}, & \text{si } B > 0; \\ 1 - e^{BT}, & \text{si } B < 0, \end{cases}$$

quand on utilise la métrique d_2 définie par

$$d_2(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\int_0^T |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On obtient aussi un résultat pour la loi de la solution de (2.28) via la transformation de Lamperti (voir [Sau12e, Th. 4]).

Afin d'étudier les comportements en temps court et en temps long du processus $(X_t)_{t \geq 0}$, on utilise la caractérisation de la propriété $T_1(C)$ par les inégalités de concentration gaussienne (voir [Led01]). Comme $T_2(C)$ implique $T_1(C)$, le théorème 14 pourra aussi être utilisé. On rappelle donc que μ satisfait $T_1(C)$ si et seulement si pour tout fonction lipschitzienne $F : (E, d) \rightarrow \mathbf{R}$, F est μ -intégrable on a pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\int_E \exp \left(\lambda \left(F - \int_E F d\mu \right) \right) d\mu \leq \exp \left(C \|F\|_{\text{Lip}} \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

où on a noté

$$\|F\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{d(x, y)}.$$

D'après l'inégalité de Chebyshev et un argument d'optimisation, on obtient l'inégalité de Hoeffding :

$$\mu \left(F - \int_E F d\mu > r \right) \leq \exp \left(-\frac{r^2}{2 C \|F\|_{Lip}^2} \right) \quad \forall r > 0. \quad (2.30)$$

Par exemple, si on se donne une fonction V de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R} avec $\|V\|_{Lip} \leq \alpha$, on peut considérer la fonctionnelle F définie sur $C(0, T; \mathbf{R}^d)$ par $F(\gamma) = \frac{1}{T} \int_0^T V(\gamma(t)) dt$. Elle est α -lipschitzienne par rapport à d_∞ et α/\sqrt{T} -lipschitzienne par rapport à la distance d_2 . Sous les hypothèses du théorème 13, on obtient que

$$\mathbf{P}_x \left(\frac{1}{T} \int_0^T [V(X_t) - \mathbf{E}V(X_t)] dt > r \right) \leq \exp \left(-\frac{r^2}{C\alpha^2 T^{2H}} \right). \quad (2.31)$$

On peut aussi obtenir

$$\mathbf{P}_x \left(\left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t - x| - \mathbf{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t - x| \right) \right] > r \right) \leq \exp \left(-\frac{r^2}{2CT^{2H}} \right). \quad (2.32)$$

Bien sûr, les inégalités (2.31) et (2.32) n'ont d'intérêt que pour le comportement en temps court. Le comportement en temps long est obtenu dans le contexte du théorème 14 grâce auquel on a

$$\mathbf{P}_x \left(\frac{1}{T} \int_0^T [V(X_t) - \mathbf{E}V(X_t)] dt > r \right) \leq \exp \left(-\frac{r^2 B^2 T^{2-2H}}{4\alpha^2 H \|\sigma\|_{0, T, \infty}^2 (1 - e^{-BT})} \right). \quad (2.33)$$

On termine cette section par quelques remarques concernant la précision des inégalités ci-dessus. Lorsque $H = 1/2$, l'inégalité (2.32) donne un ordre de convergence correct pour $T \downarrow 0$ car on retrouve celui obtenu pour une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien classique (voir [DGW04, Remark 5.12.(b)]). De même si on remplace H par $1/2$ dans (2.33), on obtient la même estimation que celle obtenue dans le corollaire 5.11 de [DGW04]. Ainsi la constante C que l'on a déterminée dans $T_1(C)$ semble optimale dans le sens où elle est cohérente avec les résultats browniens.

2.5 Inférence non paramétrique

Le problème de l'estimation non paramétrique du coefficient de dérive dans un modèle de diffusion fractionnaire est l'objet de la pré-publication [Sau12c]. On se place dans le modèle décrit par l'équation uni-dimensionnelle

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + B_t^H, \quad t \geq 0 \quad (2.34)$$

où $x_0 \in \mathbf{R}$ est la condition initiale du processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, et $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$. Le cas spécial d'un coefficient de diffusion constant permet d'utiliser les résultats de [NO02] où l'existence et l'unicité de la solution de (2.34) est montrée sous l'hypothèse de croissance linéaire $|b(x)| \leq c_b(1 + |x|)$ sur b quand $H < 1/2$, et de continuité de Hölder d'ordre $\mathfrak{b} \in (1 - 1/2H, 1)$ quand $H > 1/2$. Ces conditions sont supposées satisfaites par la suite.

La plupart des travaux d'inférence statistique pour des équations différentielles fractionnaires traite du cas paramétrique décrit par l'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t \theta b(X_s) ds + B_t^H, \quad t \geq 0, \quad (2.35)$$

avec θ le paramètre inconnu. Quand le coefficient b est linéaire, X est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire et le problème de l'estimation de θ a attiré beaucoup d'attention. En premier lieu, un estimateur du maximum de vraisemblance a été étudié par [KLB02]. Des estimateurs obtenus par la méthode des moindres carrés sont proposés dans [HN10, BESO11]. Lorsque b n'est pas linéaire, l'estimateur du maximum de vraisemblance est l'objet de [TV07a, TV07b] où l'étude est menée aussi bien avec des observations continues que discrètes. D'autres méthodes pour l'estimation paramétrique de θ dans le modèle (2.35) font l'objet de [CT11, NT11, PL11].

À ma connaissance, il n'y a que l'article [MPR11] qui traite de l'estimation non-paramétrique, mais l'estimation obtenue concerne le coefficient de tendance. Plus précisément, dans [MPR11] le modèle

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \epsilon B_t^H, \quad t \geq 0 \quad (2.36)$$

est considéré et les auteurs proposent un estimateur à noyau du coefficient $b_s := b(x_s)$ où $(x_s)_{s \geq 0}$ est la solution de l'équation (2.36) pour $\epsilon = 0$. Le comportement asymptotique est alors étudié quand $\epsilon \rightarrow 0$ sur un horizon de temps fini pour $H > 1/2$.

Notre sujet d'étude est donc de nature différente de celui décrit dans [MPR11]. On cherche à estimer la valeur de la fonction b en un point x fixé. L'expression de l'estimateur des moindres carrés obtenu dans le cas linéaire amène naturellement à proposer l'estimateur à noyau du type Nadaraya-Watson

$$\hat{b}_{t,h}^{\text{NW}}(x) = \frac{\int_0^t (t-s)^{1-2H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) dX_s}{\int_0^t (t-s)^{1-2H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) ds}. \quad (2.37)$$

où N est continûment dérivable, positive, à support dans $[-1,1]$, $h > 0$ est la fenêtre. On note $B = (B_s)_{s \geq 0}$ le mouvement brownien pour lequel $B_t^H = \int_0^t K_H(t,s) dB_s$ (procédure de transfert déjà décrite dans (2.15) et (2.20)). On exprime l'erreur commise en estimant $b(x)$ par $\hat{b}_{t,h}^{\text{NW}}(x)$ grâce à

$$\hat{b}_{t,h}^{\text{NW}}(x) = b(x) + \xi_{x,h}(X_t) + r_{x,h}^{\text{loc}}(X_t) \quad (2.38)$$

où

$$\xi_{x,h}(X_t) = \frac{\int_0^t \alpha_H (t-s)^{1/2-H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) dB_s}{\int_0^t \alpha_H^2 (t-s)^{1-2H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) ds}$$

représente une erreur due à l'aléa (α_H est une constante dépendant uniquement de H) et

$$r_{x,h}^{\text{loc}}(X_t) = \frac{\int_0^t (t-s)^{1-2H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) [b(X_s) - b(x)] ds}{\int_0^t (t-s)^{1-2H} N\left(\frac{X_s-x}{h}\right) ds}$$

représente la pertinence de l'approximation de b par une fonction constante au voisinage de x .

D'un point de vue pratique, le cas réel est celui où les observations sont discrètes. On suppose donc maintenant que le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est observé aux instants $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ et que les temps d'observations sont uniformément espacés avec $t_{k+1} - t_k \asymp n^{-\alpha}$ et $\alpha \in (0, 1)$. Ainsi le nombre de points d'approximation n est relié à l'horizon des observations t_n par $n \asymp t_n^\gamma$ où $\gamma = 1/(1 - \alpha) > 1$. Une discrétisation de l'expression (2.37) nous amène à proposer comme estimateur

$$\hat{b}_{t_n, h}^{\text{NW}}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N\left(\frac{X_{t_k} - x}{h}\right) (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})}{\sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N\left(\frac{X_{t_k} - x}{h}\right) (t_{k+1} - t_k)}.$$

Une décomposition analogue à (2.38) est obtenue :

$$\hat{b}_{t_n, h}^{\text{NW}}(x) - b(x) = \xi_{x, h}(X_{t_n}^n) + r_{x, h}^{\text{loc}}(X_{t_n}) + r_{x, h}^{\text{traj}}(X_{t_n}) \quad (2.39)$$

où, en notant $Q_s^n = \sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N\left(\frac{X_{t_k} - x}{h}\right) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(s)$, on a posé

$$\begin{aligned} \xi_{x, h}(X_{t_n}) &= \frac{\int_0^{t_n} \alpha_H (t - s)^{H-1/2} Q_s^n dB_s}{\int_0^{t_n} \alpha_H^2 Q_s^n ds}, \\ r_{x, h}^{\text{loc}}(X_{t_n}) &= \frac{\int_0^{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N\left(\frac{X_{t_k} - x}{h}\right) (b(X_{t_k}) - b(x)) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(s) ds}{\int_0^{t_n} Q_s^n ds}, \\ r_{x, h}^{\text{traj}}(X_{t_n}) &= \frac{\int_0^{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N\left(\frac{X_{t_k} - x}{h}\right) (b(X_s) - b(X_{t_k})) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(s) ds}{\int_0^{t_n} Q_s^n ds}. \end{aligned}$$

On remarque que $r_{x, h}^{\text{loc}}(X_{t_k})$ représente encore la qualité de l'approximation de b par une fonction constante mais juste aux points $(X_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$. Un nouveau type d'erreur apparaît dans la décomposition (2.39) : $r_{x, h}^{\text{traj}}(X_{t_n})$ qui mesure l'erreur commise quand on procède à la discrétisation du processus X .

Avant d'énoncer les principaux résultats, on donne les hypothèses que l'on utilisera :

Hypothèse 1.

- 1.a)** *Régularité locale* : pour tout x il existe L_x tel que $|b(y) - b(y')| \leq L_x |y - y'|$ au voisinage de x .
- 1.b)** *Régularité globale* : b est de classe C^1 avec croissance polynomiale : il existe $c_b > 0$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $|b(x)| + |b'(x)| \leq c_b (1 + |x|^m)$.
- 1.c)** *Condition de Lipschitz unilatérale* : il existe $L > 0$ tel que

$$(b(y) - b(y')) \times (y - y') \leq -L |y - y'|^2, \quad y, y' \in \mathbf{R}.$$

Un premier type de résultat est alors étudié : ce sont des résultats non asymptotiques pour lesquels il n'y aura pas de différence entre un contexte ergodique et non-ergodique. On renvoie à [Spo00] pour une discussion approfondie dans le cas d'une diffusion brownienne.

On énonce dans le théorème suivant des inégalités exponentielles pour les probabilités conditionnelles de déviation.

Théorème 15.

– Sous l'hypothèse **1.a)**, quand la trajectoire est observée de manière continue, on a :

$$\mathbf{P} \left(\left| \hat{b}_{t,h}^{\text{NW}}(x) - b(x) \right| \geq L_x h^b + \zeta, \mathcal{A}_{t,h}^{\text{NW}} \right) \leq 2 \exp \left(-\rho^2 (1-H) \zeta^2 t^{2\beta} \right) \quad (2.40)$$

$$\text{où } \mathcal{A}_{t,h}^{\text{NW}} = \left\{ \int_0^t \alpha_H (t-s)^{1-2H} N \left(\frac{X_s - x}{h} \right) ds \geq \rho t^{1-H+\beta} \right\}.$$

– Si maintenant b vérifie **1.b)** et **1.c)**, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| \hat{b}_{t_n,h}^{\text{NW}}(x) - b(x) \right| \geq L h + c_{x,h,L} \epsilon_n + \zeta, \mathcal{A}_{t_n,h}^{\text{NW}} \right) \\ \leq 2 \exp \left(-\frac{\rho^2 (1-H) \zeta^2}{16 \alpha_H^2} t_n^{2\beta} \right) + c_{H,\gamma} t_n^{\frac{H(\gamma-1)}{\gamma+1}} \exp \left(-\frac{\zeta}{4L} t_n^{\frac{2H(\gamma-1)}{\gamma+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{où } \mathcal{A}_{t_n,h}^{\text{NW}} = \left\{ \int_0^{t_n} \alpha_H \sum_{k=0}^{n-1} (t_n - t_k)^{1-2H} N \left(\frac{X_{t_k} - x}{h} \right) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(s) ds \geq \rho t_n^{1-H+\beta} \right\}.$$

Dans les inégalités ci-dessus, ρ et β sont fixés et les inégalités sont valides pour tout $\zeta > 0$. Concrètement, dès que l'on dispose de nos n observations, on regarde si l'événement $\mathcal{A}_{t_n,h}^{\text{NW}}$ s'est réalisé et si c'est le cas, l'estimation (2.41) est utilisable. Si ce n'est pas le cas, on ne peut garantir la qualité de notre estimation.

Le comportement asymptotique des estimateurs est étudié lorsque la diffusion (2.34) est ergodique. On sera ainsi en mesure d'affirmer que le processus séjourne assez souvent dans un voisinage de x de telle sorte que les quantités $N \left(\frac{X_{t_k} - x}{h} \right)$ ne soient pas trop souvent nulles. La propriété d'ergodicité de (2.16) suppose que b vérifie l'hypothèse de croissance polynomiale **1.b)** et la condition de Lipschitz uni-latérale **1.c)**. On a ainsi l'existence d'une variable aléatoire \bar{X} telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t(\omega) - \bar{X}(\theta_t(\omega))| = 0 \quad (2.42)$$

pour \mathbf{P} -presque-tout $\omega \in \Omega$, avec θ_t l'opérateur de translation avec incrément $t \in \mathbf{R}$ défini par $\theta_t \omega(\cdot) = \omega(\cdot + t) - \omega(\cdot)$ sur l'espace de Wiener canonique associé au mouvement brownien fractionnaire B^H (voir [GAKN09, NT11]). La solution de (2.16) converge alors quand $t \rightarrow \infty$ vers un processus stationnaire $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ défini par $\bar{X}_t(\omega) = \bar{X}(\theta_t(\omega))$. La proposition suivante joue un rôle crucial dans l'étude de la consistance des estimateurs.

Proposition 5. *On rappelle que la discrétisation en temps vérifie $t_{k+1} - t_k \asymp n^{-\alpha}$ avec $\alpha \in (0,1)$ (ou de manière équivalente le nombre de points d'approximation n est tel que $n \asymp t_n^\gamma$ avec $\gamma = 1/(1-\alpha) > 1$). Soit φ de classe C^1 telle que $|\varphi(y)| + |\varphi'(y)| \leq c_\varphi(1 + |y|^p)$ pour $c_\varphi > 0$ et $p \in \mathbf{N}$.*

5.i) *Si on suppose les hypothèses **1.b)** et **1.c)** satisfaites, alors on a*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X_s) ds = \mathbf{E}(\varphi(\bar{X})), \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

5.ii) *Si maintenant on suppose juste l'hypothèse **1.b)** et que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X_s) ds = \mathbf{E}(\varphi(\bar{X})), \mathbf{P}\text{-p.s.}$, alors si $\gamma > 1 + (m^2 + p)H$ et $\gamma > p + 1$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_{t_k}) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(s) \right\} ds = \mathbf{E}(\varphi(\bar{X})) \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \quad (2.43)$$

Bien que cette proposition soit partiellement contenue dans la proposition 2.3 et le lemme 3.1 de [NT11], il est important de remarquer que l'on a une condition liant le nombre de points d'approximation, H et les degrés de croissance polynomiale m et p . Les conditions $\gamma > 1 + (m^2 + p)H$ et $\gamma > p + 1$ sont assez intuitives. Par exemple, si m est fixé, on a besoin de plus de points dans la discrétisation en temps lorsque H augmente. Comme les trajectoires de B^H sont plus régulières quand H augmente, il en sera de même des trajectoires de X et le processus oscillera de moins en moins. On aura donc besoin d'attendre plus longtemps pour que X retourne un grand nombre de fois dans le voisinage de x . Les estimations menant à l'énoncé 5.ii) ont été menées sans l'utilisation de la condition de Lipschitz unilatérale. Si cette condition est satisfaite, on peut montrer que le résultat reste vrai pour n'importe quelle valeur de $\gamma > 1$ comme c'est le cas dans [NT11].

On peut maintenant énoncer le résultat de consistance de l'estimateur de Nadaraya-Watson dans le cas d'observations discrètes.

Théorème 16. *En sus des hypothèses 1.b) and 1.c) on demandera que la loi de \bar{X} soit non-dégénérée au voisinage de x (pour toute fenêtre h , $\mathbf{E}[N(\frac{\bar{X}-x}{h})] > 0$). Alors pour $n \asymp t_n^\gamma$ avec $\gamma > 1 + m^2H$ on a :*

$$\hat{b}_{t_n, h}^{\text{NW}}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0]{\text{en probabilité}} b(x). \quad (2.44)$$

Il est bien sûr intéressant d'établir sous quelles conditions la loi de la solution stationnaire est non-dégénérée. Ce problème n'a pas encore été étudié. Néanmoins, cette hypothèse est satisfaite pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ergodique.

Dans le cas continu, on peut aussi montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{b}_{t, h}^{\text{NW}}(x) = b(x)$ presque-sûrement lorsque $H < 1/2$ (on garde la convergence en probabilité si $H > 1/2$). La forte consistance est une conséquence du résultat suivant dont la preuve est basée sur un lemme de Toeplitz intégral fractionnaire. Cette proposition sera reprise dans le cadre des martingales fractionnaires exposé dans la section 3.1 (voir proposition 8).

Proposition 6. *Sous l'hypothèse 1.a), quand $H < 1/2$ et*

$$\int_0^\infty N^2\left(\frac{X_s - x}{h}\right) ds = +\infty \quad \mathbf{P} - p.s. \quad (2.45)$$

l'estimateur de Nadaraya-Watson est fortement consistant

$$\hat{b}_{t, h}^{\text{NW}}(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty, h \rightarrow 0]{\mathbf{P} - p.s.} b(x). \quad (2.46)$$

Si la propriété d'ergodicité est valide et si la loi de solution stationnaire est non-dégénérée, (2.45) est vérifiée et on obtient la forte consistance annoncée.

Comme je l'ai précédemment mentionné, la méthode de Nadaraya-Watson consiste à approcher la fonction b par une fonction constante au voisinage du point x qui nous intéresse. Un autre type d'estimateur est proposé et étudié dans [Sau12c] lorsqu'on approxime b par une fonction affine au voisinage de x . Cela donne lieu à des estimateurs appelés estimateurs localement linéaires. Ce sont encore des estimateurs à noyaux, construits en s'inspirant des estimateurs que l'on aurait obtenus par la méthode des moindres carrés si la fonction b était effectivement linéaire. Leurs expressions sont plus lourdes (donc je ne les présente pas dans cette synthèse) mais on obtient les mêmes résultats que pour les estimateurs de Nadaraya-Watson, à savoir :

- une inégalité exponentielle des probabilités de déviation et la convergence en probabilité de l'estimateur sont établis dans [Sau12c, Th. 7] pour les observations continues ;
- les mêmes résultats pour des observations discrètes sont donnés dans [Sau12c, Th. 8 et 9].

Chapitre 3

Autres thématiques étudiées

Je décris brièvement dans ce chapitre des travaux indépendants de mes deux thématiques principales décrites dans les chapitres 1 et 2. Ceci étant dit, le sujet développé dans la prochaine section a été motivé par le problème d'estimation non paramétrique décrit dans la section 2.5.

3.1 Inégalités exponentielles pour des martingales fractionnaires

Dans [Sau12a], je me suis intéressé aux inégalités exponentielles pour les martingales fractionnaires introduites dans [HNS09]. La principale motivation provient de la remarque qui suit.

Pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale continue, le processus $M^{(\alpha)} = (M_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ défini par $M_t^{(\alpha)} = \int_0^t (t-s)^\alpha dM_s$ est appelé martingale fractionnaire (pourvu que l'intégrale existe). Afin d'exposer nos résultats, on considère que la martingale fractionnaire $M^{(\alpha)}$ est de la forme $M_t^{(\alpha)} = \int_0^t (t-s)^\alpha dM_s$ avec M une martingale locale continue s'écrivant $M_t = \int_0^t \xi_s dW_s$ où $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ est un processus progressivement mesurable de carré intégrable. En d'autres termes, on s'intéresse aux martingales fractionnaires qui s'écrivent

$$M_t^{(\alpha)} = \int_0^t (t-s)^\alpha \xi_s dW_s. \quad (3.1)$$

Pour un temps t fixé, le processus $Z^t = (Z_u^t)_{0 \leq u \leq t}$ définie par $Z_u^t = \int_0^u (t-s)^\alpha \xi_s dW_s$ est une "vraie" martingale. On peut dans ce cas appliquer les inégalités exponentielles classiques : si par exemple $\alpha < 0$, on a

$$\mathbf{P} \left(|M_t^{(\alpha)}| \geq u, \int_0^t |\xi_\tau|^2 d\tau \leq \nu_t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{u^2}{4 t^{2\alpha} \nu_t} \right).$$

Ce type d'argument a été utilisé lorsque je me suis intéressé au problème d'inférence non-paramétrique pour une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien fractionnaire (voir [Sau12c] décrit dans la section 2.5 du chapitre 2). C'est ce qui a motivé la poursuite de l'étude de ce type d'inégalité aux martingales fractionnaires.

Notre but a été de trouver des probabilités de déviation pour $\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(\alpha)}|$, ce qui n'est plus une application immédiate des résultats connus pour les martingales non fractionnaires (lorsque

$\alpha = 0$). On rappelle que dans le cas classique, si la martingale $M^{(0)}$ s'annule au temps $t = 0$, alors

$$\mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |M_s| \geq at \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{a^2 t}{2c} \right), \quad (3.2)$$

si c est une constante telle que $\langle M \rangle_t \leq ct$ pour tout t (voir [RY99, Exercice 3.16, Chapter 4]). Comme la variation quadratique n'est plus appropriée dans notre contexte fractionnaire, on s'efforce d'énoncer les résultats en faisant intervenir des quantités en relation avec la β -variation de $M^{(\alpha)}$, avec

$$\beta = 2/(1 + 2\alpha).$$

On rappelle que pour un processus continu $X = (X_t)_{t \geq 0}$, la β -variation de X sur l'intervalle $[0, t]$ est notée par $\langle X \rangle_{\beta, t}$ et est définie comme la limite en probabilité (si la limite existe) de

$$S_{\beta, n}^{[0, t]} := \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^\beta$$

où pour $i = 0, \dots, n$, $t_i^n = \frac{i}{n} \times t$. D'après [HNS09], la β -variation de $M^{(\alpha)}$ (voir l'expression (3.1)) existe dans \mathbf{L}^1 (cela signifie que la convergence dans de $S_{\beta, n}^{[0, t]}$ a lieu dans \mathbf{L}^1) et

$$\langle M^{(\alpha)} \rangle_{\beta, t} = c_\alpha \int_0^t |\xi_s|^\beta ds$$

où c_α dépend seulement de α . De plus, il y a des relations entre la β -variation de $M^{(\alpha)}$ et la variation quadratique de la martingale M sous jacente. On a en effet les estimations

$$\begin{cases} \langle M \rangle_t & \leq c_\alpha^{-2/\beta} t^{\frac{\beta-2}{\beta}} \langle M^{(\alpha)} \rangle_{\beta, t}^{2/\beta} & \text{quand } \alpha < 0; \\ \langle M^{(\alpha)} \rangle_{\beta, t} & \leq c_\alpha t^{\frac{2-\beta}{2}} \langle M \rangle_t^{\beta/2} & \text{lorsque } \alpha > 0. \end{cases}$$

Afin d'énoncer notre résultat, on supposera que le processus $(\xi_t)_{t \geq 0}$ vérifie

$$\begin{cases} \int_0^t \mathbf{E}(|\xi_s|^{\beta'}) ds < \infty & \text{pour un } \beta' > \beta, \text{ si } \alpha < 0; \\ \int_0^t \mathbf{E}(|\xi_s|^2) ds < \infty, & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Garsia-Rodemich-Rumsey [GRR71] et une technique déjà employée précédemment dans [NR02] (voir aussi [RSS96]; [Sow92]) on aboutit à l'énoncé suivant.

Théorème 17. *En notant $C_t = 2 + 2^{1/2} t^2$, pour toute fonction positive $t \mapsto \nu_t$ et tout $L \geq 1$, on obtient*

(i) *quand $\alpha < 0$*

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(\alpha)}| \geq L c_1 t^{\frac{\beta' - \beta}{2\beta\beta'}} \nu_t^{1/2}, \left(\int_0^t |\xi_\tau|^{\beta'} d\tau \right)^{2/\beta'} \leq \nu_t \right) \leq C_t \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 L^2}{t^{\frac{\beta' - \beta}{\beta\beta'}}} \right\} \quad (3.3)$$

avec c_1 qui est connue explicitement et $\kappa^2 = 4\pi(\beta\beta'/(\beta' - \beta))^3$;
 (ii) lorsque $\alpha > 0$, pour tout $\varepsilon \in (0, \alpha)$ on obtient

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(\alpha)}| \geq L 2^6 \kappa t^{\alpha-\varepsilon} \nu_t^{1/2}, \int_0^t |\xi_\tau|^2 d\tau \leq \nu_t \right) \leq C_t \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 L^2}{t^{2(\alpha-\varepsilon)}} \right\} \quad (3.4)$$

avec $\kappa = (\pi/2)^{1/2} \varepsilon^{-3/2}$;
 (iii) si on suppose de plus que le processus ξ est presque-sûrement borné par c_∞ , alors pour tout $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2} + \alpha)$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(\alpha)}| \geq L 2^6 \kappa c_\infty t^{1/2+\alpha-\varepsilon} \right) \leq C_t \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 L^2}{t^{1+2\alpha-2\varepsilon}} \right\}, \quad (3.5)$$

avec $\kappa = (\pi/2)^{1/2} \varepsilon^{-3/2}$.

Les inégalités ci-dessus sont cohérentes (du moins lorsque t tend vers l'infini) avec l'inégalité classique pour les martingales rappelée en (3.2). Il suffit pour cela de choisir $\alpha = 0$ (ou de manière équivalente $\beta = \beta' = 0$) et de poser $L \asymp t^{1/2+\varepsilon}$ dans (3.4).

Une application du résultat ci-dessus concerne une loi des grands nombres pour des martingales fractionnaires.

Proposition 7. Soit $M^{(\alpha)}$ une martingale fractionnaire de la forme (3.1) avec $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On suppose de plus que le processus ξ est borné par une constante c_∞ . S'il existe $a > 0$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M^{(\alpha)} \rangle_{\beta, t}}{t^a} = +\infty \text{ presque-sûrement}$$

alors la convergence suivante a lieu en probabilité :

$$\frac{\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{(\alpha)}|}{\langle M^{(\alpha)} \rangle_{\beta, t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ce résultat n'est bien sûr qu'un premier pas dans l'étude des lois des grands nombres pour des martingales fractionnaires. Il sera intéressant d'obtenir un théorème qui ne présuppose pas la bornitude du processus ξ et qui ne fasse intervenir que la divergence de la β -variation. À noter pour terminer que l'on peut obtenir assez facilement une loi forte des grands nombres lorsque $\alpha > 0$ sous une autre type d'hypothèse. La proposition suivante a été utilisée dans [Sau12c] sous une forme un peu différente pour démontrer la consistance forte de l'estimateur non-paramétrique de Nadaraya-Watson du coefficient de dérive dans une diffusion fractionnaire (voir section 2.5).

Proposition 8. Supposons que pour tout $T > 0$, $\int_0^T \xi_s^2 ds < \infty$. Alors lorsque $\alpha > 0$ et $\int_0^{+\infty} \xi_s^2 ds = +\infty$ presque-sûrement, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t (t-s)^\alpha \xi_s dW_s}{\int_0^t (t-s)^{2\alpha} \xi_s^2 ds} = 0 \text{ presque-sûrement.}$$

La preuve de ce résultat n'est pas une application directe des résultats classiques sur les martingales mais une application d'une version fractionnaire du lemme de Toeplitz intégral.

3.2 Approximation de l'enveloppe de Snell et options américaines

En collaboration avec Vlad Bally, nous avons étudié dans [BS02a] un schéma d'approximation pour un problème d'arrêt optimal sur une trajectoire brownienne, quand le mouvement brownien est approximé par une marche aléatoire. Considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$ et notons

$$X_t^x = x + b t + a B_t, \quad a, b, x \in \mathbf{R}, \quad a > 0.$$

Étant donnée une fonction h que l'on suppose (au moins) Lipschitz-continue, notre but est de calculer l'enveloppe de Snell

$$Y_t^x = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(h(\tau, X_\tau^x) | \mathcal{F}_t),$$

où $\mathcal{T}_{t,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$. C'est l'enveloppe de Snell du processus $(h(t, X_t^x))_{0 \leq t \leq T}$.

Ce résultat s'applique aux options américaines standards. Rappelons qu'un Put Américain sur un stock est le droit de vendre un produit financier à un prix spécifié K (appelé le prix d'exercice) à n'importe quel instant jusqu'à une date future donnée T (appelée maturité). Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur à une date $t \in [0, T]$ d'une telle option est donnée par Y_t^x défini ci-dessus avec $h(t, x) := e^{-rt}(K - e^x)^+$. La constante r est le taux d'intérêt (supposé positif), le coefficient de diffusion a , est communément appelé volatilité (supposée positive aussi) et le coefficient de dérive b , est dans ce cas égal à $r - a^2/2$.

On donne un schéma de discrétisation basé sur une méthode d'arbre, qui est une variante des méthodes d'arbre étudiées dans [Lam98], [Lam02], [LR00] et [LP90]. On présente notre algorithme. On suppose que la fonction h est de la forme $h(t, x) = e^{-rt}f(x)$ (ce qui couvre les applications en mathématiques financières). On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit la suite de fonction \hat{u}_k par

$$\begin{aligned} \hat{u}_{k(T)}(i\varepsilon) &= f(i\varepsilon), & -k(T) \leq i \leq k(T), \\ &\vdots \\ \hat{u}_k(i\varepsilon) &= \max \{ f(i\varepsilon), \gamma_\varepsilon^+ \hat{u}_{k+1}(i\varepsilon + \varepsilon) + \gamma_\varepsilon^- \hat{u}_{k+1}(i\varepsilon - \varepsilon) \}, & -k \leq i \leq k, \end{aligned}$$

avec $k(T) = \lfloor a^2 T / \varepsilon^2 \rfloor$. Les constantes γ_ε^+ et γ_ε^- proviennent de calculs exacts en relation avec le premier temps de sortie d'un mouvement brownien avec dérive (voir [BS02b]). Des valeurs exactes seront données. On donne juste ici leurs développements en puissances de ε :

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon^+ &= \frac{1}{2} + \frac{b}{2a^2}\varepsilon - \frac{r}{2a^2}\varepsilon^2 - \left(\frac{b^3}{6a^6} + \frac{br}{2a^4} \right) \varepsilon^3 + \left(\frac{5r^2}{12a^4} + \frac{rb}{12a^6} \right) \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \\ \gamma_\varepsilon^- &= \frac{1}{2} - \frac{b}{2a^2}\varepsilon - \frac{r}{2a^2}\varepsilon^2 + \left(\frac{b^3}{6a^6} + \frac{br}{2a^4} \right) \varepsilon^3 + \left(\frac{5r^2}{12a^4} + \frac{rb}{12a^6} \right) \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

On montre alors que

$$|Y_0^x - \hat{u}_0(x)| \leq c\delta_\varepsilon.$$

Les valeurs de c et δ_ε dépendent de la régularité de la fonction f . Si f est Lipschitzienne continue

alors $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, si f est une combinaison linéaire de fonctions convexes alors $\delta_\varepsilon = \varepsilon\sqrt{-\ln \varepsilon}$ et si f est deux fois dérivable alors $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. La complexité de l'algorithme est de l'ordre de $\varepsilon^{-3}\sqrt{-\ln \varepsilon}$. L'estimation en $\delta_\varepsilon = \varepsilon\sqrt{-\ln \varepsilon}$ est nouvelle à notre connaissance.

L'idée qui nous a amenés à cet algorithme est la suivante. On définit $\tau_0 = 0$ et $\tau_{k+1} = \inf \{t > \tau_k : |X_t^x - X_{\tau_k}^x| \geq \varepsilon\}$. La suite $(X_{\tau_k}^x)_{k \geq 0}$ prend ses valeurs sur la grille $\{x + i\varepsilon, i \in \mathbf{Z}\}$ et a une structure très simple car si on définit $\sigma_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ et $\delta_k = X_{\tau_{k+1}}^x - X_{\tau_k}^x$, alors $(\sigma_k, \delta_k)_{k \geq 0}$ sont des variables aléatoires indépendantes et on connaît leurs lois (ce qui nous permet de calculer explicitement γ_ε^+ et γ_ε^-). D'autre part, en utilisant la loi des grands nombres, $\tau_{k(T)} \sim T$ si $k(T) = \lceil a^2 T / \varepsilon^2 \rceil$. On remplace donc l'enveloppe de Snell $(Y_t^x)_{0 \leq t \leq T}$ de $(h(t, X_t^x))_{0 \leq t \leq T}$ par l'enveloppe de Snell discrète $(Q_k^\varepsilon)_{0 \leq k \leq k(T)}$ de $(h(\tau_k, X_{\tau_k}^x))_{0 \leq k \leq k(T)}$. L'algorithme décrit précédemment représente le calcul de Q_0^ε en utilisant le principe de programmation dynamique. Il faut noter l'analogie de notre idée avec celle de [LR00].

Pour contrôler l'erreur, on emploie des estimations classiques mais dans le cas où f est une combinaison linéaire de fonctions convexes (c'est le cas le plus intéressant), on utilise une généralisation de la formule d'Itô-Tanaka et donc le temps local intervient. On aura alors besoin d'estimations plus fines concernant les accroissements du temps local. On montrera aussi que la fonction $\hat{u}_k(x)$ construite ci-dessus donnera une approximation uniforme de $u(t, x)$ solution du problème d'obstacle associé à $Y_s^{t,x}$. En conséquence, on obtiendra une approximation de la région de continuation pour ce problème d'obstacle et aussi une approximation du dernier temps d'exercice optimal pour une option américaine.

Bibliographie

- [Bal04] V. BALLY – *The central limit theorem for a nonlinear algorithm based on quantization*, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **460** (2004), no. 2041, p. 221–241, Stochastic analysis with applications to mathematical finance.
- [BCV01] B. BERGÉ, I. D. CHUESHOV & P.-A. VUILLERMOT – *On the behavior of solutions to certain parabolic SPDE's driven by Wiener processes*, *Stochastic Process. Appl.* **92** (2001), no. 2, p. 237–263.
- [BESO11] R. BELFADLI, K. ES-SEBAIY & Y. OUKNINE – *Parameter estimation for fractional ornstein-uhlenbeck processes : non-ergodic case*, *ArXiv e-prints* (2011), no. 1102.5491.
- [BH07] F. BAUDOIN & M. HAIRER – *A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion*, *Probab. Theory Related Fields* **139** (2007), no. 3-4, p. 373–395.
- [BL97] G. BARLES & E. LESIGNE – *SDE, BSDE and PDE*, in *Backward stochastic differential equations (Paris, 1995–1996)*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 364, Longman, Harlow, 1997, p. 47–80.
- [BM01a] V. BALLY & A. MATOUSSI – *Weak solutions for SPDEs and backward doubly stochastic differential equations*, *J. Theoret. Probab.* **14** (2001), no. 1, p. 125–164.
- [BM01b] R. BUCKDAHN & J. MA – *Stochastic viscosity solutions for nonlinear stochastic partial differential equations. I.*, *Stochastic Process. Appl.* **93** (2001), no. 2, p. 181–204.
- [BP03a] V. BALLY & G. PAGÈS – *Error analysis of the optimal quantization algorithm for obstacle problems*, *Stochastic Process. Appl.* **106** (2003), no. 1, p. 1–40.
- [BP03b] — , *A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems*, *Bernoulli* **9** (2003), no. 6, p. 1003–1049.
- [BPP01] V. BALLY, G. PAGÈS & J. PRINTEMS – *A stochastic quantization method for nonlinear problems*, *Monte Carlo Methods Appl.* **7** (2001), no. 1-2, p. 21–33, Monte Carlo and probabilistic methods for partial differential equations (Monte Carlo, 2000).
- [BPP03] V. BALLY, G. PAGÈS & J. PRINTEMS – *First-order schemes in the numerical quantization method*, *Math. Finance* **13** (2003), no. 1, p. 1–16, Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001).
- [Bre83] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [BS02a] V. BALLY & B. SAUSSEREAU – *Approximation of the Snell envelope and American options prices in dimension one*, *ESAIM Probab. Statist.* **6** (2002), p. 1–19 (electronic).

- [BS02b] A. N. BORODIN & P. SALMINEN – *Handbook of Brownian motion—facts and formulae*, second éd., Probability and its Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [BS04] V. BALLY & B. SAUSSEREAU – *A relative compactness criterion in Wiener-Sobolev spaces and application to semi-linear stochastic PDEs*, *J. Funct. Anal.* **210** (2004), no. 2, p. 465–515.
- [BS05] B. BERGÉ & B. SAUSSEREAU – *On the long-time behaviour of a class of parabolic SPDE's : monotonicity methods and exchange of stability*, *ESAIM Probab. Stat.* **9** (2005), p. 254–276 (electronic).
- [BVW12] C. BAUZET, G. VALLET & P. WITTBOLD – *The cauchy problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation*, *Journal of Hyperbolic Differential Equations* (in press, 2012).
- [CF10] T. CASS & P. FRIZ – *Densities for rough differential equations under Hörmander's condition*, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 3, p. 2115–2141.
- [CFV09] T. CASS, P. FRIZ & N. VICTOIR – *Non-degeneracy of Wiener functionals arising from rough differential equations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), no. 6, p. 3359–3371.
- [Chu02] I. CHUESHOV – *Monotone random systems theory and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1779, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [CQ02] L. COUTIN & Z. QIAN – *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions*, *Probab. Theory Related Fields* **122** (2002), no. 1, p. 108–140.
- [CT11] A. CHRONOPOULO & S. TINDEL – *On inference for fractional differential equations*, *ArXiv e-prints* (2011), no. 1104.3966.
- [CV98] I. D. CHUESHOV & P. A. VUILLERMOT – *Long-time behavior of solutions to a class of stochastic parabolic equations with homogeneous white noise : Stratonovitch's case*, *Probab. Theory Related Fields* **112** (1998), no. 2, p. 149–202.
- [CV00] — , *Long-time behavior of solutions to a class of stochastic parabolic equations with homogeneous white noise : Itô's case*, *Stochastic Anal. Appl.* **18** (2000), no. 4, p. 581–615.
- [Daf77] C. M. DAFERMOS – *Generalized characteristics and the structure of solutions of hyperbolic conservation laws*, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), no. 6, p. 1097–1119.
- [Daf05] C. M. DAFERMOS – *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [Dec05] L. DECREUSEFOND – *Stochastic integration with respect to Volterra processes*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **41** (2005), no. 2, p. 123–149.
- [DGW04] H. DJELLOUT, A. GUILLIN & L. WU – *Transportation cost-information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions*, *Ann. Probab.* **32** (2004), no. 3B, p. 2702–2732.
- [DLM10] M. DOZZI & J. A. LÓPEZ-MIMBELA – *Finite-time blowup and existence of global positive solutions of a semi-linear SPDE*, *Stochastic Process. Appl.* **120** (2010), no. 6, p. 767–776.
- [DN07a] S. DARSESES & I. NOURDIN – *Dynamical properties and characterization of gradient drift diffusion*, *Electron. Comm. Probab.* **12** (2007), p. 390–400 (electronic).

- [DN07b] — , *Stochastic derivatives for fractional diffusions*, *Ann. Probab.* **35** (2007), no. 5, p. 1998–2020.
- [DNP09] S. DARSE, I. NOURDIN & G. PECCATI – *Differentiating σ -fields for Gaussian and shifted Gaussian processes*, *Stochastics* **81** (2009), no. 1, p. 79–97.
- [Dos77] H. DOSS – *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires*, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **13** (1977), no. 2, p. 99–125.
- [DPMN92] G. DA PRATO, P. MALLIAVIN & D. NUALART – *Compact families of Wiener functionals*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 12, p. 1287–1291.
- [DS07] S. DARSE & B. SAUSSEREAU – *Time reversal for drifted fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$* , *Electron. J. Probab.* **12** (2007), p. no. 43, 1181–1211 (electronic).
- [DS09] Y. DUCEL & B. SAUSSEREAU – *Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en troisième ?*, *Repères IREM.* **77** (2009).
- [DS11] — , *La prise de décision de la seconde à la première*, *Repères IREM.* **85** (2011).
- [DV10] A. DEBUSSCHE & J. VOVELLE – *Scalar conservation laws with stochastic forcing*, *J. Funct. Anal.* **259** (2010), no. 4, p. 1014–1042.
- [EKMS00] W. E, K. KHANIN, A. MAZEL & Y. SINAI – *Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing*, *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 3, p. 877–960.
- [Eva98] L. C. EVANS – *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fer75] X. FERNIQUE – *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, in *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974*, Springer, Berlin, 1975, p. 1–96. Lecture Notes in Math., Vol. 480.
- [FN08] J. FENG & D. NUALART – *Stochastic scalar conservation laws*, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), no. 2, p. 313–373.
- [Föll86] H. FÖLLMER – *Time reversal on Wiener space*, in *Stochastic processes—mathematics and physics (Bielefeld, 1984)*, Lecture Notes in Math., vol. 1158, Springer, Berlin, 1986, p. 119–129.
- [FS93] W. H. FLEMING & H. M. SONER – *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Applications of Mathematics (New York), vol. 25, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [GAKN09] M. J. GARRIDO-ATIENZA, P. E. KLOEDEN & A. NEUENKIRCH – *Discretization of stationary solutions of stochastic systems driven by fractional Brownian motion*, *Appl. Math. Optim.* **60** (2009), no. 2, p. 151–172.
- [GPPP06] E. GOBET, G. PAGÈS, H. PHAM & J. PRINTEMS – *Discretization and simulation of the Zakai equation*, *SIAM J. Numer. Anal.* **44** (2006), no. 6, p. 2505–2538 (electronic).
- [GRR71] A. M. GARSIA, E. RODEMICH & H. RUMSEY, JR. – *A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes*, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1970/1971), p. 565–578.
- [HN07] Y. HU & D. NUALART – *Differential equations driven by Hölder continuous functions of order greater than $1/2$* , in *Stochastic analysis and applications*, Abel Symp., vol. 2, Springer, Berlin, 2007, p. 399–413.

- [HN10] —, *Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*, *Statist. Probab. Lett.* **80** (2010), no. 11-12, p. 1030–1038.
- [HNS09] Y. HU, D. NUALART & J. SONG – *Fractional martingales and characterization of the fractional Brownian motion*, *Ann. Probab.* **37** (2009), no. 6, p. 2404–2430.
- [Hör97] L. HÖRMANDER – *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, *Mathématiques & Applications (Berlin)* [Mathematics & Applications], vol. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [HP86] U. G. HAUSSMANN & É. PARDOUX – *Time reversal of diffusions*, *Ann. Probab.* **14** (1986), no. 4, p. 1188–1205.
- [HP11] M. HAIRER & N. S. PILLAI – *Ergodicity of hypoelliptic SDEs driven by a fractional Brownian motion*, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47** (2011), no. 2, p. 601–628.
- [HSZ02] G. HETZER, W. SHEN & S. ZHU – *Asymptotic behavior of positive solutions of random and stochastic parabolic equations of Fisher and Kolmogorov types*, *J. Dynam. Differential Equations* **14** (2002), no. 1, p. 139–188.
- [KLB02] M. L. KLEPTSZYNA & A. LE BRETON – *Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process*, *Stat. Inference Stoch. Process.* **5** (2002), no. 3, p. 229–248.
- [Kru70] S. N. KRUŽKOV – *First order quasilinear equations with several independent variables.*, *Mat. Sb. (N.S.)* **81 (123)** (1970), p. 228–255.
- [KS85] S. KUSUOKA & D. STROOCK – *Applications of the Malliavin calculus. II*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **32** (1985), no. 1, p. 1–76.
- [Kus82] S. KUSUOKA – *The nonlinear transformation of Gaussian measure on Banach space and absolute continuity. I*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **29** (1982), no. 3, p. 567–597.
- [Lam98] D. LAMBERTON – *Error estimates for the binomial approximation of American put options*, *Ann. Appl. Probab.* **8** (1998), no. 1, p. 206–233.
- [Lam02] D. LAMBERTON – *Brownian optimal stopping and random walks*, *Appl. Math. Optim.* **45** (2002), no. 3, p. 283–324.
- [Led01] M. LEDOUX – *The concentration of measure phenomenon*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [LL06] X.-D. LI & T. J. LYONS – *Smoothness of Itô maps and diffusion processes on path spaces. I*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), no. 4, p. 649–677.
- [LMR97] S. LOTOTSKY, R. MIKULEVICIUS & B. L. ROZOVSKII – *Nonlinear filtering revisited : a spectral approach*, *SIAM J. Control Optim.* **35** (1997), no. 2, p. 435–461.
- [Lot06] S. V. LOTOTSKY – *Wiener chaos and nonlinear filtering*, *Appl. Math. Optim.* **54** (2006), no. 3, p. 265–291.
- [LP90] D. LAMBERTON & G. PAGÈS – *Sur l'approximation des réduites*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **26** (1990), no. 2, p. 331–355.
- [LQ02] T. LYONS & Z. QIAN – *System control and rough paths*, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press, Oxford, 2002, Oxford Science Publications.
- [LR00] D. LAMBERTON & L. C. G. ROGERS – *Optimal stopping and embedding*, *J. Appl. Probab.* **37** (2000), no. 4, p. 1143–1148.

- [Lyo94] T. LYONS – *Differential equations driven by rough signals. I. An extension of an inequality of L. C. Young*, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), no. 4, p. 451–464.
- [MM98] R. MANTHEY & K. MITTMANN – *On a class of stochastic functional-differential equations arising in population dynamics*, *Stochastics Stochastics Rep.* **64** (1998), no. 1-2, p. 75–115.
- [MNS89] A. MILLET, D. NUALART & M. SANZ – *Integration by parts and time reversal for diffusion processes*, *Ann. Probab.* **17** (1989), no. 1, p. 208–238.
- [MPR11] M. N. MISHRA & B. L. S. PRAKASA RAO – *Nonparametric estimation of trend for stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion*, *Stat. Inference Stoch. Process.* **14** (2011), no. 2, p. 101–109.
- [Nel67] E. NELSON – *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967.
- [NO02] D. NUALART & Y. OUKNINE – *Regularization of differential equations by fractional noise*, *Stochastic Process. Appl.* **102** (2002), no. 1, p. 103–116.
- [NR02] D. NUALART & A. RĂȘCANU – *Differential equations driven by fractional Brownian motion*, *Collect. Math.* **53** (2002), no. 1, p. 55–81.
- [NS06] I. NOURDIN & T. SIMON – *On the absolute continuity of one-dimensional SDEs driven by a fractional Brownian motion*, *Statist. Probab. Lett.* **76** (2006), p. 907–912.
- [NS09] D. NUALART & B. SAUSSEREAU – *Malliavin calculus for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion*, *Stochastic Process. Appl.* **119** (2009), no. 2, p. 391–409.
- [NT11] A. NEUENKIRCH & S. TINDEL – *A least square-type procedure for parameter estimation in stochastic differential equations with additive fractional noise*, *ArXiv e-prints* (2011), no. 1111.1816.
- [Nua06] D. NUALART – *The Malliavin calculus and related topics*, second éd., Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Ole57] O. A. OLEÏNIK – *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)* **12** (1957), no. 3(75), p. 3–73.
- [ØVZ00] B. ØKSENDAL, G. VÅGE & H. Z. ZHAO – *Asymptotic properties of the solutions to stochastic KPP equations*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **130** (2000), no. 6, p. 1363–1381.
- [ØVZ01] — , *Two properties of stochastic KPP equations : ergodicity and pathwise property*, *Nonlinearity* **14** (2001), no. 3, p. 639–662.
- [Par86] É. PARDOUX – *Grossissement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion*, in *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, Lecture Notes in Math., vol. 1204, Springer, Berlin, 1986, p. 48–55.
- [Par91] É. PARDOUX – *Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées*, in *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, Lecture Notes in Math., vol. 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 67–163.
- [PL11] A. PAPAVALIOU & C. LADROUE – *Parameter estimation for rough differential equations*, *Ann. Statist.* **39** (2011), no. 4, p. 2047–2073.
- [PP90] É. PARDOUX & S. G. PENG – *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, *Systems Control Lett.* **14** (1990), no. 1, p. 55–61.

- [PP94] É. PARDOUX & S. G. PENG – *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs*, *Probab. Theory Related Fields* **98** (1994), no. 2, p. 209–227.
- [RSS96] C. ROVIRA & M. SANZ-SOLÉ – *The law of the solution to a nonlinear hyperbolic SPDE*, *J. Theoret. Probab.* **9** (1996), no. 4, p. 863–901.
- [RY99] D. REVUZ & M. YOR – *Continuous martingales and Brownian motion*, third éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Sau01] B. SAUSSEREAU – *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques*, Thèse de doctorat de l'université du Maine, 2001.
- [Sau12a] — , *Deviation probability bounds for fractional martingales and related remarks*, *Statist. Probab. Lett.* **82** (2012), p. 1610–1618.
- [Sau12b] — , *A new numerical scheme for stochastic partial differential equations with multiplicative noise*, *Preprint* (2012).
- [Sau12c] — , *Nonparametric inference for fractional diffusion*, *ArXiv e-prints* (2012), no. 1111.0446.
- [Sau12d] — , *A remark on the mean square distance between the solutions of fractional SDEs and Brownian SDEs*, *Stochastics* **84** (2012), no. 1, p. 1–19.
- [Sau12e] — , *Transportation inequalities for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion*, *Bernoulli* **18** (2012), no. 1, p. 1–23.
- [Ser99] D. SERRE – *Systems of conservation laws. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [SKM93] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS & O. I. MARICHEV – *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
- [Sow92] R. B. SOWERS – *Large deviations for a reaction-diffusion equation with non-Gaussian perturbations*, *Ann. Probab.* **20** (1992), no. 1, p. 504–537.
- [Spo00] V. G. SPOKOINY – *Adaptive drift estimation for nonparametric diffusion model*, *Ann. Statist.* **28** (2000), no. 3, p. 815–836.
- [SS12] B. SAUSSEREAU & L. STOICA – *Scalar conservation laws with fractional stochastic forcing : existence, uniqueness and invariant measure*, *Stochastic Process. Appl.* **122** (2012), no. 2, p. 1456–1486.
- [Sus78] H. J. SUSSMANN – *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations*, *Ann. Probability* **6** (1978), no. 1, p. 19–41.
- [TV07a] C. A. TUDOR & F. G. VIENS – *Statistical aspects of the fractional stochastic calculus*, *Ann. Statist.* **35** (2007), no. 3, p. 1183–1212.
- [TV07b] — , *Statistical aspects of the fractional stochastic calculus*, *Hal e-prints* (2007), no. hal-00130622.
- [You36] L. C. YOUNG – *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration*, *Acta Math.* **67** (1936), p. 251–282.
- [Zäh98] M. ZÄHLE – *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I*, *Probab. Theory Related Fields* **111** (1998), no. 3, p. 333–374.