



**HAL**  
open science

# Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques

Arnaud Münch

► **To cite this version:**

Arnaud Münch. Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques. Mathématiques [math]. Université de Franche-comté (UFC), 2008. tel-02275979

**HAL Id: tel-02275979**

**<https://univ-fcomte.hal.science/tel-02275979>**

Submitted on 2 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

**Université de Franche-Comté**  
**U.F.R. des Sciences et Techniques**

## **HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Discipline : Mathématiques Appliquées

**Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle**  
**et**  
**d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques**

présentée par

**Arnaud MÜNCH**

Soutenue le jeudi 30 octobre 2008

devant le jury composé de :

Grégoire ALLAIRE	Rapporteur	Ecole polytechnique, Palaiseau
Dominique CHAPELLE	Examineur	Inria-Rocquencourt, Le Chesnay
Philippe DESTUYNDER	Rapporteur	CNAM, Paris
Enrique FERNANDEZ-CARA	Examineur	Université de Seville, Espagne
Antoine HENROT	Examineur	Université Henri Poincaré, Nancy 1
Patrick HILD	Examineur	Université de Franche-Comté, Besançon
Jacques RAPPAZ	Examineur	Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne
Jean-Pierre RAYMOND	Président	Université Paul Sabatier, Toulouse 3
Enrique ZUAZUA	Rapporteur	Centre Basque de Mathématiques Appliquées, Espagne



# Remerciements

Si la recherche en mathématique, est à l'instar de toute activité sur deux roues, un sport fondamentalement individuel, à la veillée au coin du feu, il n'en demeure pas moins vrai que - lorsque la pente enneigée et glissante s'élève - l'aide et le support d'autrui s'avère très profitable.

Je remercie en premier lieu Grégoire Allaire, Philippe Destuynder et Enrique Zuazua pour avoir accepté instantanément de rapporter ce document. Un grand merci à Grégoire Allaire pour ses lectures approfondies et détaillées ainsi pour ses nombreuses remarques et encouragements. Un grand merci à Philippe Destuynder pour sa contribution dans cette habilitation et pour nos récentes discussions très enrichissantes : je me rappelle - alors étudiant en thèse - mes nombreuses lectures sur ces travaux concernant les modèles de coque et autres singularités dans les joints collés. Enfin, un grand merci à Enrique Zuazua pour son aide, sa réactivité, ainsi que pour nos nombreuses discussions de travail, engagées donc stimulantes, dans son bureau à l'université autonome de Madrid, au cours de l'année 2003/2004.

Un grand merci à Dominique Chapelle, Enrique-Fernandez-Cara, Antoine Henrot, Patrick Hild, Jacques Rappaz et Jean-Pierre Raymond pour leur présence au sein du jury et pour leurs encouragements. Je remercie Dominique pour son accueil très positif, au cours l'année 2002-2003, au sein du projet MACS de l'Inria-Rocquencourt. Je remercie Enrique pour son soutien décisif et sa visite, pleine de perspectives, au cours de ces dernières semaines. Enfin, je remercie Patrick pour représenter l'université de Franche-Comté, et pour son soutien au quotidien. Last but not least, vive la Suisse libre !!! (et en particulier le Valais !)

Une fois de plus, j'ai pu compter ces derniers années et malgré la distance, sur l'aide et l'appui sans faille de Yves Ousset. Mon cher Yves, je te remercie très amicalement.

L'expérience et l'aide de Mark Asch sur l'approximation numérique des contrôles pour l'équation des ondes a été pour moi déterminante. Je l'en remercie chaleureusement.

Ces derniers mois, j'ai renoué avec plaisir une collaboration avec Giuseppe Geymonat, nous ayant mené dans des discussions passionnantes couplant contrôlabilité, théorie des coques et théorie spectrale. J'en suis très honoré. Mon cher Pippo, malgré ton absence dans le jury, j'ai - à ce jour - tenu ma promesse de ne pas révéler ta cuisson non *al dente* des pâtes (!?!). Reste à voir le lien avec la densification du spectre de l'opérateur des coques sur tout  $\mathbb{R}^+$  lorsque sa limite membranaire présente du spectre essentiel -);

Je remercie Ademir Fernando Pazoto, pour nos échanges très fructueux, sa visite à Besançon en Septembre 2007 ensoleillé (!), et son accueil lors de mes deux longs séjours à l'université Federal do Rio de Janeiro. Définitivement, les brésiliens ont dans le cœur la chaleur qu'ils ont dehors. Je remercie également Carlos Castro et Sorin Micu pour nos échanges constants.

Je suis également très redevable de Pablo Pedegral, pour son accueil à Ciudad Real (province de Castilla-La-Mancha), son initiation à l'usage des mesures de Young en calcul des variations/relaxation et nos nombreuses discussions. Je remercie également les membres de son équipe, en particulier José Carlos Bellido et Faustino Maestre.

Un grand grand merci à Francisco Periago de Cartagène pour son support et son aide. J'espère que notre collaboration va durer très longtemps. Cher Paco, je suis toujours disponible pour les entraînements VTT de la pequenita pitufina Alba : à deux ans passé, il faut s'y mettre !

Le lecteur attentif l'aura remarqué, j'ai quelque peu failli concernant la parité homme/femme au sein du jury ! Je le déplore mais remercie néanmoins chaleureusement, entre autres, Assia Benabdallah, Florence Hubert, Françoise Krasucki, Paola Loreti, Bernadette Miara, Florence Roudolff, pour leurs conseils et encouragements au cours de ces dernières années.

Merci également à Fatiha Alabau, Ernesto Aranda, Guy Barles, Pascal Bégout, Mihai Bostan, Giuseppe Buttazzo, Franck Boyer, Michel Cristofol, Mohamed Jaoua, Patricia Gaetan, Olivier Goubet, Mariana Hargus, Vilmos Komornik, Patrick Laborde, Jérôme Le Rousseau, Cristinel Mardare, Gustavo Perla Menzala, Alberto Murillo, Yves Renard, Jaime Rivera, Michel Salaun, Marina Vidrascu, Olivier Wilk.

Naturellement, je remercie Christian Le Merdy pour son accueil au sein du laboratoire de Mathématiques de Besançon, ainsi que tout son personnel administratif et technique, remarquable d'efficacité et de disponibilité. Merci également à tous les membres des équipes "Analyse numérique" et "Equations aux dérivées partielles" pour l'atmosphère stimulante maintenue. Je remercie, en particulier, Monsieur (- ;) Farid Ammar-Khodja, alias Chérif pour les intimes, pour nos très nombreuses discussions - certes encore et toujours stériles - souvent jusqu'à des heures indues.

Enfin, mes derniers mots vont à mes proches en remerciement de leur indéfectible soutien.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>1 Contrôlabilité exacte, Stabilisation et Approximation Numérique</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction	13
1.2 Quelques rappels sur la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes	14
1.2.1 Contrôlabilité exacte frontière	14
1.2.2 Contrôlabilité exacte distribuée	16
1.3 Stabilisation interne	16
1.4 Approximation numérique de la contrôlabilité	17
1.4.1 Un schéma implicite uniformément contrôlable pour l'équation des ondes 1-D - Discrétisation en temps et en espace	17
1.4.2 Un schéma semi-discret en espace uniformément contrôlable pour l'équation des ondes 2-D- Contrôle frontière	35
1.4.3 Contrôlabilité 2-D et discrétisation complète temps - espace	42
1.5 Le cas de la stabilisation numérique	49
1.5.1 Discrétisation du domaine $\Omega_{h_1, h_2}$ approximation de $\Omega$	49
1.5.2 Schéma aux différences finies semi-discret avec terme de viscosité	50
1.5.3 Décroissance exponentielle uniforme	51
1.5.4 Méthode des multiplicateurs	52
1.5.5 Convergence de la solution stabilisée	53
1.5.6 Spectre de l'opérateur des ondes amorties discret	55
1.5.7 Un exemple numérique	55
1.6 Stabilisation uniforme d'une arche non linéaire	56
1.6.1 Existence et unicité pour le modèle de Marguerre-Vlasov	58
1.6.2 Décroissance exponentielle pour $E_\varepsilon$ ( $\varepsilon > 0$ positif fixe)	58
1.6.3 Limite singulière lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$	58

1.6.4	Une illustration numérique dans le cas $\alpha = 0$ . . . . .	60
1.7	Contrôlabilité des coques élastiques minces et spectre essentiel . . . . .	60
1.7.1	Rappels sur la modélisation des coques élastiques minces - Motivations . . . . .	61
1.7.2	Contrôlabilité d'une arche cylindrique - Le cas $\varepsilon > 0$ . . . . .	63
1.7.3	Contrôlabilité d'une arche cylindrique - Le cas membranaire $\varepsilon = 0$ . . . . .	68
1.8	Et aussi ... la contrôlabilité non linéaire d'une corde soumise à un obstacle . . . . .	74
<b>2</b>	<b>Optimisation de forme et Relaxation</b> . . . . .	<b>79</b>
2.1	Introduction . . . . .	79
2.2	Amortissement de l'équation des ondes : étude numérique par la méthode des lignes de niveaux . . . . .	80
2.2.1	Introduction . . . . .	80
2.2.2	Variation de $E$ par rapport à $\omega$ et $a$ . . . . .	80
2.2.3	Minimisation par rapport à $\omega$ - Méthode des lignes de niveaux ( <i>Level set</i> ) . . . . .	83
2.2.4	Exemples numériques . . . . .	84
2.3	Rappels sur les mesures de Young appliquées au calcul des variations . . . . .	87
2.3.1	Méthode directe en calcul des variations . . . . .	87
2.3.2	Mesures de Young . . . . .	94
2.4	Relaxation du problème de l'optimisation de l'amortissement des ondes . . . . .	96
2.4.1	Cas unidimensionnel : $\Omega = (0, 1)$ . . . . .	97
2.4.2	Le cas $N = 2$ . . . . .	102
2.4.3	Expériences numériques pour $(RP_\omega)$ . . . . .	102
2.5	Distribution spatio-temporelle pour l'équation des ondes . . . . .	105
2.5.1	Position du problème et résultat principal . . . . .	105
2.5.2	Calcul du polyconvexifié et des laminés d'ordre un et deux . . . . .	109
2.5.3	Simplification de $(RP)$ . . . . .	114
2.5.4	Applications numériques . . . . .	115
2.6	Distribution optimale de deux matériaux : cas de l'équation de la chaleur . . . . .	116
2.7	Support optimal du contrôle exact pour l'équation des ondes . . . . .	121
2.7.1	Position du problème - Variation de forme et topologique . . . . .	121
2.7.2	Quelques résultats numériques et relaxation . . . . .	122
2.8	Relaxation d'un problème d'optimisation de forme dans le cadre de la mécanique de la rupture . . . . .	126
2.8.1	Sur le contrôle de la propagation d'une fissure . . . . .	126
2.8.2	Relaxation et mesure Div-Rot . . . . .	129
2.8.3	Une transformation finale originale - Applications numériques . . . . .	132
	<b>Quelques perspectives</b> . . . . .	<b>139</b>

Table des matières 1

**Publications de l'auteur 143**

**Bibliographie 145**





# Introduction

Mes travaux de recherche concernent de façon générale l'analyse de *problèmes mathématiques issus de la mécanique du solide*. On peut mettre en évidence les trois axes de recherche suivants :

- Modélisation de la propagation des fissures et des coques minces élastiques ;
- Analyse numérique de problèmes de contrôlabilité exacte et de stabilisation ;
- Relaxation de problème d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques.

Le premier axe a été abordé au cours de ma thèse de troisième cycle (1999-2002, voir manuscrit [1] et publications [8, 9, 10, 20, 21]) conjointement effectuée à l'ONERA<sup>1</sup> et à l'université PARIS VI sous la direction de FRANCOISE KRASUCKI et YVES OUSSET, l'objet étant d'une part la modélisation de la propagation des délaminages dans les coques stratifiées et d'autre part l'analyse de modèles non linéaires de joints collés. Ces aspects ont été enrichis au sein du projet MACS<sup>2</sup> de l'INRIA Rocquencourt<sup>3</sup>, de 2002 à 2003 dans le cadre d'un post-doctorat, portant sur l'étude théorique et numérique de modèles de coques incompressibles (voir publication [5] en collaboration avec DOMINIQUE CHAPPELLE et CRISTINEL MARDARE).

Le second axe a été abordé initialement en Octobre 2003 à l'université autonome de Madrid, au sein de l'équipe dirigée par ENRIQUE ZUAZUA, dans le cadre d'un second post-doctorat<sup>4</sup>. Initialement, je me suis intéressé à la délicate question de l'approximation numérique du contrôle exact pour l'équation des ondes homogène ([14, 15], puis en collaboration avec CARLOS CASTRO et SORIN MICU [4]). Parallèlement, deux questions de stabilisation ont été analysées : d'une part la stabilisation de l'équation des ondes discrétisée uniformément par rapport au pas de discrétisation dans [22] et plus récemment, l'analyse de la stabilisation d'un modèle non linéaire d'arche uniformément par rapport à un paramètre [23]. Ces résultats ont été obtenus avec ADEMIR FERNANDO PAZOTO. Ces deux dernières années, dans le cadre de l'élasticité, je me suis intéressé à la contrôlabilité d'un système piezo-électrique (voir [13] avec BERNADETTE MIARA) et à la contrôlabilité exacte frontière de systèmes modélisant les vibrations de coques élastiques minces [29], notamment le cas membranaire ([2, 30] en collaboration avec FARID AMMAR-KHODJA et GIUSEPPE GEYMONAT). Enfin, récemment, j'ai étudié avec F. AMMAR-KHODJA et S. MICU la contrôlabilité non linéaire d'une poutre homogène soumise à un obstacle frontière [32].

Le troisième axe mentionné a été abordé plus récemment et concerne l'analyse de problèmes de calcul de variations issus de la thématique de l'optimisation de forme. L'analyse théorique consiste à associer à chaque problème une formulation relaxée bien posée dont le minimum égale l'infimum du problème initial. Cette relaxation est obtenue en utilisant l'approche variationnelle basée sur le calcul explicite de quasi-convexifiés. Le problème de la position optimale de la zone de dissipation pour l'équation des ondes amorties est abordé dans [19] puis, en collaboration avec PABLO PEDREGAL et FRANCISCO PERIAGO dans [24, 25, 26]. Par ailleurs, la distribution optimale et spatio-temporelle de deux matériaux constituant une corde vibrante est résolue dans les références [11, 12] avec FAUSTINO MAESTRE menant à la notion de *matériaux*

---

<sup>1</sup>Office national d'études et de recherche aérospatiales.

<sup>2</sup>Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures.

<sup>3</sup>Institut national de recherche en informatique et automatique.

<sup>4</sup>s'incrimant dans le réseau européen TMR *Smart System*.

*dynamiques*. De façon analogue, le cas de l'équation de la chaleur (conductivité spatio-temporelle d'une barre ou d'une membrane) est traité dans [27]. Faisant le lien avec le second axe, j'ai également couplé les notions de contrôlabilité exacte et d'optimisation de forme dans les travaux [16, 17, 18]. Enfin, très récemment, selon différentes approches, je me suis intéressé à quelques problèmes d'optimisation dans le cadre de la mécanique de la rupture, introduisant la notion de *contrôle de fissure* (voir [6, 7] en collaboration avec PATRICK HILD et [23]), et prolongeant ainsi les travaux du premier axe de recherche évoqué.

Je décris dans ce document quelques travaux effectués ces cinq dernières années, notamment au sein du laboratoire de mathématiques de l'université de Franche-Comté depuis septembre 2004. Le document se compose de deux parties. La première partie concerne des questions théoriques et numériques de contrôlabilité exacte et de stabilisation : les références [14, 15, 4, 3, 22, 23, 29] et [2] sont décrites. La seconde partie traite de quelques questions d'optimisation de forme et présente les références [19, 24, 25, 11, 12] et [28]. Dans chaque cas, après présentation du problème, je donne le résultat théorique principal obtenu, illustré ensuite par quelques expériences numériques. Enfin, je conclus par quelques perspectives.

# Résumé

Ce document de synthèse des travaux effectués depuis septembre 2004 comporte deux parties non indépendantes : la première aborde la résolution de quelques problèmes de contrôlabilité exacte. La seconde s'inscrit dans la thématique de l'optimisation de forme utilisant des techniques de relaxation.

★ ★ ★

La première partie aborde l'approximation numérique de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes posée sur des cylindres bornés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , c'est-à-dire l'approximation de fonctions  $v \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)$  telles que pour tout  $T > 2$  et  $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , la solution unique de

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ y = v \chi_{\Gamma_0}, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1) & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

vérifie  $(y(T, \cdot), y'(T, \cdot)) = (0, 0)$ . De telles fonctions existent lorsque le triplet  $(\Omega, \Gamma_0, T)$  vérifie la condition d'optique géométrique. Leur approximation est délicate dans la mesure où l'usage des schémas numériques convergents usuels conduit, pour une large classe de données initiales, à une suite de contrôles  $(v_h)_h$  - indexée par le paramètre d'approximation  $h$  - non uniformément bornée par rapport à  $h$  : précisément, la norme  $L^2$  de  $v_h$  diverge exponentiellement. On dit que de tels schémas ne sont *pas uniformément contrôlables*. Cette non-commutation entre approximation numérique et contrôlabilité exacte est connue depuis les travaux du groupe de ROLAND GLOWINSKI et a été analysée plus récemment par le groupe de ENRIQUE ZUAZUA. Elle est due aux hautes fréquences - générées par l'approximation numérique - dont la vitesse de groupe est de l'ordre de  $h$  et qui ne peuvent être observées par la zone  $\Gamma_0$ , support du contrôle en un temps uniforme. En d'autres termes, le spectre numérique associé à ces schémas - à l'image du schéma à trois points centré en dimension 1 ou du schéma à cinq points en dimension 2, présente au moins un point d'accumulation. Déterminer des schémas éliminant cette pathologie est facile : il suffit par exemple de relaxer la condition de contrôlabilité et de chercher une suite  $(v_h)_h$  telle que  $(y_h(T), y'_h(T)) = O(h)$ . Déterminer des schémas uniformément contrôlables efficaces, c'est-à-dire, d'une part assurant une vitesse convergence de la norme  $\|v_h\|_{L^2}$  conforme au degré d'approximation, et d'autre part, conduisant à une condition de stabilité CFL raisonnable, est nettement moins facile. Une méthode simple consiste à éliminer ces hautes fréquences par une technique de filtrage numérique. Citons également les méthodes multi-grilles qui s'apparentent à une technique de projection hors de ces fréquences. Une autre possibilité, exploitée ici, consiste à redresser le spectre pour les hautes fréquences et ainsi éliminer tout point d'accumulation. Dans le cadre des différences finies en une dimension d'espace, nous montrons que le schéma suivant :

$$(\bar{\mathcal{S}}_{h,\Delta t}) \begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} + \frac{1}{4}(h^2 - \Delta t^2) \Delta_h \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, & (0, T) \times (0, 1) \\ y_{h,\Delta t}(t, 0) = 0, \quad y_{h,\Delta t}(t, 1) = v_{h,\Delta t}(t), & (0, T) \\ (y_{h,\Delta t}(0, \cdot), y'_{h,\Delta t}(0, \cdot)) = (y^0, y^1) \end{cases}$$

sous la condition  $T > 2 \max\left(1, \Delta t^2/h^2\right)$  est uniformément contrôlable. Cette inégalité conduit à la condition de stabilité

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

L'équation principale est formellement la discrétisation de l'équation  $y'' - y_{xx} + \epsilon(h, \Delta t)y''_{xx} = 0$ ,  $\epsilon(h, \Delta t) = (h^2 - \Delta t^2)/4$ , non contrôlable en raison de ce terme singulier d'ordre 4. Au niveau discret, ce terme qui s'annule lorsque  $h = \Delta t$ , conduit à un spectre  $(\lambda_{k,h,\Delta t})_{1 \leq k \leq J}$  bien séparé (sans point d'accumulation) : en particulier, l'écart de la racine carrée des deux dernières valeurs propres est

$$\sqrt{\lambda_{J,h,\Delta t}} - \sqrt{\lambda_{J-1,h,\Delta t}} = \pi h^2 \Delta t^{-2} + o(h^2).$$

La démonstration de la contrôlabilité uniforme de ce schéma d'ordre deux repose sur l'utilisation du célèbre lemme d'Ingham adapté au cas discret. La mise en œuvre numérique confirme la convergence de  $\|v_h\|_{L^2(0,T)}$  en  $O(h)$ , en particulier dans le cas le plus sévère de données  $y^0$  discontinues. Par ailleurs, le conditionnement numérique de l'opérateur HUM correspondant est polynomial en  $O(h^{-2})$  à comparer au comportement exponentiel pour les schémas usuels. Enfin, remarquons que la condition de stabilité CFL est d'autant moins restrictive que le temps de contrôlabilité  $T$  - supérieur à 2 - est grand. Nous traitons également le cas de la dimension deux d'espace pour lequel le schéma standard à cinq points n'est pas uniformément contrôlable. En revanche, pour le carré unité, le schéma semi-discret élément fini mixte obtenu par une approximation  $\mathbb{Q}_1$  de la position  $y$  et  $\mathbb{Q}_0$  de la vitesse  $y'$  sur chaque quadrangle est uniformément contrôlable en  $h$ . L'observabilité uniforme est obtenue en utilisant la méthode des multiplicateurs discrets. La résolution numérique exacte en temps - s'appuyant sur la connaissance explicite des fonctions et valeurs propres - du problème de la contrôlabilité illustre la robustesse de ce schéma. Un autre schéma uniformément contrôlable est celui obtenu formellement de la discrétisation par différence finie centrée de l'équation

$$\left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_1}^2\right) \left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_2}^2\right) y'' - \Delta y = 0, \quad (0, T) \times (0, 1)^2.$$

Cependant, après discrétisation en temps, il apparaît que la vitesse de groupe associée au schéma aux éléments finis mixtes est uniformément minorée si et seulement si  $\Delta t$  est de l'ordre de  $h^{3/2}$ , altérant son utilisation. Afin de remédier à cela, on introduit alors, de façon similaire au cas 1-d, un schéma aux différences finies à trois paramètres : un paramètre pour contrôler la stabilité et deux paramètres pour contrôler le spectre. Après optimisation de ces trois paramètres, il apparaît que le schéma formellement obtenu par discrétisation centrée de l'équation

$$\left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_1}^2\right) \left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_2}^2\right) y'' - \left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_1}^2\right) \partial_{x_2}^2 y - \left(1 + \frac{h^2}{4} \partial_{x_2}^2\right) \partial_{x_1}^2 y = 0, \quad (0, T) \times (0, 1)^2$$

et auquel on applique la méthode de Newmark, est inconditionnellement stable, consistant d'ordre deux en temps et espace et possède une vitesse de groupe uniformément minorée si  $\Delta t$  est de l'ordre de  $h$ . De plus, le schéma est très peu dispersif avec un spectre  $\{\omega_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,0}(\xi)\}$  très proche du spectre continu  $\{\omega(\xi)\}_{\xi \in (0,\pi/h)}$  défini par  $\omega(\xi) = |\xi|$  : pour  $\Delta t = h/\sqrt{2}$ , on a

$$\omega(\xi) \leq \omega_{N,h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0}(\xi) \leq \sqrt{2} \omega(\xi), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2,$$

et la remarquable égalité pour  $\xi = (\xi_1, \xi_1)$  :  $\omega(\xi_1, \xi_1) = \omega_{N,h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0}(\xi_1, \xi_1)$ . Enfin, pour un contrôle agissant sur

deux cotés consécutifs du carré unité, la condition de contrôlabilité uniforme est  $\Delta t \leq h \sqrt{T/(2\sqrt{2})}$ . La mise en œuvre confirme la robustesse de ce schéma, dans le cadre de la contrôlabilité exacte, pour toute donnée dans  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . Remarquons que les schémas précédents sont *équivalents* aux schémas aux différences finies usuels, à un terme de perturbation singulière près défini sur tout le domaine. Négligeables pour les faibles fréquences, ces termes soigneusement calibrés permettent d'observer les composantes hautes fréquences en un temps uniforme. On peut les concevoir comme des termes de contrôles internes de faibles amplitudes.

Naturellement, la pathologie qui a lieu pour la contrôlabilité exacte se retrouve dans le cadre voisin de la stabilisation. Soient  $\omega \subset \Omega \in C^2(\mathbb{R}^N)$  un ouvert borné et  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  tel que  $a(x) \geq a_0 > 0$  dans  $\omega$ . Si l'énergie associée à la solution de l'équation des ondes amorties

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(x)\mathcal{X}_\omega y' = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1) & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

décroit exponentiellement pour toute donnée  $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  - lorsque le triplet  $(\Omega, \omega, T)$  satisfait la condition géométrique en temps long - cette propriété n'est pas vraie au niveau discret uniformément en  $h$  lorsque les schémas usuels sont employés. Dans le cas  $N = 2$  nous montrons que, pour toute discrétisation régulière  $\Omega_h$  de  $\Omega$ , telle que  $\Omega_h \subset \Omega$  pour tout  $h = (h_1, h_2)$ , le schéma issu de la discrétisation en espace de l'équation

$$y'' - \Delta y + a(x)\mathcal{X}_\omega y' - h_1^2 \partial_{x_1}^2 y' - h_2^2 \partial_{x_2}^2 y' = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

est exponentiellement stable. Précisément, il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\alpha$  indépendantes de  $(h_1, h_2)$  telles que l'énergie  $E_{h_1, h_2}$  satisfasse la propriété

$$E_{h_1, h_2}(t) \leq CE_{h_1, h_2}(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall (h_1, h_2) \in (0, 1)$$

pour chaque solution  $y_{h_1, h_2}$ . La démonstration repose sur la méthode des multiplicateurs semi-discrets. A nouveau, le terme de viscosité introduit dans le schéma - analogue ici à une régularisation de Tychonoff permet d'amortir uniformément les composantes hautes fréquences et ainsi d'obtenir un taux de décroissance exponentielle uniformément minoré. Nous montrons la convergence faible étoile de la solution  $y_{h_1, h_2}$  stabilisée vers  $y$  dans  $L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$  lorsque la donnée  $(y_{h_1, h_2}^0, y_{h_1, h_2}^1)$  converge faiblement vers  $(y^0, y^1)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Cela valide la méthode. Enfin, la mise en œuvre numérique - plus aisée que celle de la contrôlabilité exacte - indique clairement, lorsque le terme de viscosité est employé, que l'abscisse spectrale  $-\max\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_h)\}$  de l'opérateur d'amortissement  $\mathcal{A}_h$  est uniformément minoré.

Le reste de la première partie, de nature plus théorique, étudie des questions de stabilisation et de contrôlabilité de systèmes dynamiques modélisant les vibrations d'arche ou coque mince. Une première étude concerne la stabilisation d'un système non linéaire de type Marguerre-Vlasov

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt}^\varepsilon - h(u_{x^\varepsilon}^\varepsilon, w^\varepsilon)_x = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ w_{tt}^\varepsilon - w_{xxx}^\varepsilon + w_{xxx}^\varepsilon - (w_x^\varepsilon h(u_{x^\varepsilon}^\varepsilon, w^\varepsilon))_x + k(x)h(u_{x^\varepsilon}^\varepsilon, w^\varepsilon) = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0, \end{cases}$$

faisant le lien, via un paramètre  $\varepsilon$ , entre les systèmes de type Von Kármán ( $\varepsilon = 1$ ) et les systèmes de type Kirchhoff-Love ( $\varepsilon = 0$ ). Le système à deux inconnues  $(u^\varepsilon, w^\varepsilon)$  - les déplacements respectivement longitudinal et normal - modélise une arche de courbure  $k(x)$  et de longueur  $L$ . Encastrée en  $x = 0$ , l'arche est soumise à une dissipation frontière en  $x = L$  agissant sur la déformation longitudinale  $h$  :

$$h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) = -\varepsilon^\alpha u_t^\varepsilon(L, t); \quad h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) \equiv u_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon) + k(x)w^\varepsilon$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'analyse porte sur le comportement asymptotique de la solution de ce système dissipatif par rapport à  $\varepsilon$  selon les valeurs de  $\alpha$ . Nous montrons la décroissance exponentielle de l'énergie uniformément en  $\varepsilon$  si  $\alpha \in [0, 1]$  et si la courbure  $k$  est suffisamment petite. Le passage à la limite en  $\varepsilon$  met en évidence deux systèmes distincts selon que  $\alpha \in (0, 1]$  ou  $\alpha = 0$ . Dans le premier cas, la solution  $w^\varepsilon$  converge faiblement vers  $w$ , vérifiant le modèle linéaire de poutre de Rayleigh

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} = 0, \quad x \in (0, L), t > 0.$$

L'énergie associée décroît exponentiellement. Le cas  $\alpha = 0$  conduit à un comportement plus riche, retenant la non linéarité et la courbure :  $w^\varepsilon$  converge vers  $w$  solution de

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} - \frac{1}{L} \left[ \zeta + \int_\Omega \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx \right] (w_{xx} - k(x)) = 0, \quad x \in (0, L), t > 0,$$

où  $\zeta$  est solution d'une équation différentielle ordinaire en temps. A nouveau, l'énergie de ce système non linéaire décroît exponentiellement. Enfin, des expériences numériques pour les cas ouverts  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 1$  suggèrent que le taux de décroissance tend vers zéro avec  $\varepsilon$ .

Une seconde étude concerne l'analyse de la contrôlabilité frontière exacte de système du type

$$y_\varepsilon'' + \mathbf{A}_M y_\varepsilon + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F y_\varepsilon = 0, \quad (0, T) \times \omega,$$

modélisant les vibrations d'une coque élastique mince.  $\mathbf{A}_M$  et  $\mathbf{A}_F$  désignent les opérateurs de membrane et de flexion, respectivement d'ordre deux et quatre. Le déplacement  $y_\varepsilon$  se décompose en les déplacements tangentiels  $y_{\varepsilon,\alpha} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2})$  et le déplacement normal  $y_{\varepsilon,3}$ , tandis que  $\varepsilon$  désigne la demi-épaisseur constante de la coque et  $\omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  désigne la surface moyenne. Dans le cas d'une arche, il y a un seul déplacement tangentiel et  $\omega \subset \mathbb{R}$ . Pour tout  $\varepsilon$  positif et  $T$  suffisamment grand (dépendant de l'épaisseur et de la courbure), la méthode des multiplicateurs conduit à l'existence d'une fonction  $v = (v_1, v_2, v_3)$  de  $L^2((0, T) \times \partial\omega)$  agissant de la façon suivante :

$$y_{\varepsilon,\alpha} = v_\alpha, \quad (\varepsilon^2)y_{\varepsilon,3} = 0 \quad (\varepsilon^2)\partial_n y_{\varepsilon,3} = v_3, \quad (0, T) \times \partial\omega$$

qui contrôle toute donnée initiale de  $L^2(\omega)^3 \times (H^{-1}(\omega) \times H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega))$ . Lorsque la courbure est nulle, la coque dégénère géométriquement en une plaque et les déplacements tangentiels  $(y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2})$ , solutions d'un système d'ordre deux sont découplés du déplacement normal  $y_{\varepsilon,3}$ , solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre. Par ailleurs, dans le cas d'une héli-sphère, des calculs analytiques ont mis en évidence que, pour certaines données, la contrôlabilité n'est pas uniforme en  $\varepsilon$ , le temps de contrôlabilité étant de l'ordre  $T = O(C/\varepsilon)$  où  $C$  désigne la courbure. Cette propriété générale est due à la perte de compacité de l'opérateur  $\mathbf{A}_\varepsilon \equiv \mathbf{A}_M + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F$  dans la transition coque-membrane : précisément, l'opérateur  $\mathbf{A}_M$  est un opérateur d'ordre mixte qui possède un spectre essentiel. A cela s'ajoute un phénomène de couche limite près de  $\partial\omega$  pour la composante normale. L'objet de l'étude est néanmoins d'identifier la classe des données initiales pour laquelle la contrôlabilité est uniforme. Cela est fait dans le cadre simple d'une arche cylindrique pour laquelle  $\omega = (0, 1)$  en étudiant le cas  $\varepsilon = 0$  : l'étude porte sur l'existence d'un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que la solution

$$\begin{cases} y'' + \mathbf{A}_M y = 0, & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ y_1(\cdot, 0) = 0, y_1(\cdot, 1) = v, & \text{dans } (0, T) \\ (y(0, \cdot), y'(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}, \quad \mathbf{A}_M y = a \begin{pmatrix} -(y_{1,1} + C y_3)_{,1} \\ C(y_{1,1} + C y_3) \end{pmatrix}$$

satisfasse  $y(\xi, T) = y'(\xi, T) = 0$  pour tout  $\xi$  de  $\omega$  et  $(y^0, y^1) \in (L^2(\omega))^2 \times (H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega))$ . Le cas limite fournit un exemple où le nombre de contrôles est inférieur au nombre de composantes de  $y$  (1 pour 2 dans le cas de l'arche et 2 pour 3 dans le cas de la coque). L'étude montre que 0 est l'élément unique du spectre essentiel ( $\sigma_{ess}(\mathbf{A}_M) = \{0\}$ ) puis que la contrôlabilité a lieu pour toute donnée dans l'orthogonal du noyau de  $\mathbf{A}_M$ . A nouveau, le théorème d'Ingham et la méthode HUM sont employés. Dans le cas d'une coque cylindrique, l'opérateur membranaire a un noyau réduit à zéro mais un spectre essentiel sous la forme d'un intervalle  $[0, a]$ ,  $a > 0$ . La première partie s'achève par une description brève d'un travail récent portant sur la contrôlabilité (non linéaire) d'une corde soumise à un obstacle unilatéral.

★ ★ ★

La seconde partie s'inscrit dans le cadre de l'optimisation de forme pour des problèmes dynamiques. Précisément, il s'agit d'optimiser la distribution de deux phases aux caractéristiques distinctes le long d'un domaine borné, éventuellement dépendante de la variable temporelle. Mathématiquement, cela revient à minimiser une fonctionnelle non convexe sur un sous-ensemble des fonctions caractéristiques, qui dépend quadratiquement du gradient de la solution d'un système dynamique, typiquement l'équation des ondes. Généralement, ces problèmes non linéaires sont mal posés dans la mesure où l'infimum n'est pas atteint dans la classe des fonctions caractéristiques. L'étude consiste alors à déterminer une formulation relaxée bien posée de ces problèmes. Pour cela, la démarche utilisée dans le cas elliptique par le groupe de PABLO

PEDREGAL est adaptée : elle consiste à réécrire le problème de forme comme un problème variationnel *standard* puis à calculer le quasi-convexifié correspondant en faisant usage des mesures de Young, lesquelles permettent d'identifier les limites faibles de suites de fonctions.

Le premier exemple détaillé dans ce document est le suivant : pour tout  $L \in (0, 1)$

$$(P_\omega) : \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega \in \mathcal{X}_L} E(\mathcal{X}_\omega, a, T), \quad E(\mathcal{X}_\omega, a, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{\omega,a}(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla y_{\omega,a}(t, \mathbf{x})|^2) dx, \quad t \geq 0$$

avec

$$\mathcal{X}_L = \left\{ \mathcal{X} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega| \right\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

où  $y_{\omega,a}$  désigne la solution de l'équation des ondes amorties introduite précédemment.  $E(\mathcal{X}_\omega, a, t)$  en représente l'énergie à l'instant  $t$ . Le problème  $(P_\omega)$  consiste à optimiser la dissipation du système par rapport à la forme de la zone  $\omega$  - supposée indépendante du temps - support de la fonction d'amortissement  $a$ . La relation  $\|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$  est une contrainte sur la mesure de  $\omega$ . En préalable au calcul d'une formulation relaxée, nous utilisons la méthode des lignes de niveaux pour approcher numériquement de façon simple ce problème. Cette méthode numérique permet une description indépendante de la frontière  $\partial\omega$  et se ramène à la résolution d'une équation d'Hamilton-Jacobi non linéaire du premier ordre. La mise en œuvre, pour un  $L$  fixé, met en évidence le rôle de l'amplitude de la fonction constante  $a$  sur la nature de la solution. Précisément, dès que  $a$  excède une valeur critique - dépendante principalement de  $L$  - les expériences numériques suggèrent que le problème  $(P_\omega)$  est mal posé (forte dépendance de la solution vis-à-vis de l'initialisation du domaine, nombre important de composantes connexes disjointes). En revanche, pour  $a$  arbitrairement petit, la méthode conduit de façon robuste à une position optimale, reliée aux extrema de la donnée initiale  $(y^0, y^1)$  comme l'indique la relation suivante de type *dérivée topologique* :

$$E(\mathcal{X}_\omega, a, T) = E(\emptyset, a, T) + a \int_{\omega} \int_0^T y'_{0,0}(t, \mathbf{x}) p_{0,0}(t, \mathbf{x}) dt + o(a)$$

où  $p_{0,0}$  désigne la solution d'un problème adjoint. Cette bifurcation par rapport à la valeur  $a$  est reliée au phénomène d'*over-damping*, lequel se traduit par une perte de la dissipation lorsque  $a$  est arbitrairement grand (en d'autres termes, la fonction  $a \rightarrow E(\mathcal{X}_\omega, a, T)$  n'est pas monotone décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ ).

L'analyse de la formulation relaxée confirme cette propriété. Cette formulation est simplement obtenue en remplaçant l'ensemble des fonctions caractéristiques par son enveloppe convexe pour la topologie faible étoilée de  $L^\infty$  :

$$(RP_\omega) : \quad \min_{s \in S_L} E(s, a, T), \quad E(s, a, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{s,a}(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla y_{s,a}(t, \mathbf{x})|^2) dx, \quad t \geq 0$$

avec  $S_L = \{s \in L^\infty(\Omega; [0, 1]), \|s\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|\}$  et  $y_{s,a}$  solution de  $y''_{s,a} - \Delta y_{s,a} + a(\mathbf{x})s(\mathbf{x})y'_{s,a} = 0$ . Cette relaxation est obtenue en plusieurs étapes :

- La première étape consiste à réécrire sous forme variationnelle le problème  $(P_\omega)$  : dans le cas unidimensionnel ( $n = 1$ ), l'équation des ondes amorties prend la forme

$$\operatorname{div}(y_t + a\mathcal{X}_\omega y, -y_x) = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

avec  $\operatorname{div} = (\partial_t, \partial_x)$ ,  $\omega$  étant indépendant du temps. De la caractérisation des vecteurs 2-D à divergence nulle, il existe alors un potentiel scalaire  $v = v(t, x) \in H^1((0, T) \times \Omega)$  tel que  $A\nabla y + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \bar{y}$  avec  $\nabla y = (y_t, y_x)^T$ ,  $\bar{y} = (y, 0)^T$ . On introduit alors le champ de vecteur  $U = (y, v) \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$  et les ensembles de matrices  $\Lambda_0 = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\}$ ,  $\Lambda_{1,\lambda} = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\}$ , où  $M^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $e_1 = (1, 0)^T$ . Cela permet de réécrire le problème sous la forme vectorielle non convexe suivante :

$$(VP_\omega) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) dx dt$$



soumis à

$$\begin{cases} U \in \left( H^1((0, T) \times \Omega) \right)^2 \\ U^{(1)} = 0 & (0, T) \times \partial\Omega \\ U^{(1)}(0, \cdot) = u_0(\cdot), \quad U_t^{(1)}(0, \cdot) = u_1(\cdot), & \Omega \\ \int_0^1 V(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) dx = L, & (0, T). \end{cases}$$

où les densités  $W$  et  $V$  sont définies par

$$W(x, U, M) = \begin{cases} \frac{1}{2} |M^{(1)}|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1, -a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}, \quad V(x, U, M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1, -a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1, -a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}.$$

$\Lambda_{1, -a(x)U^{(1)}}$  est l'ensemble des champs  $y$  qui vérifient la relation  $y'' - y_{xx} + a(x)y' = 0$  et représente  $\omega$ .  $\Lambda_0$  représente son complémentaire.

- Les étapes suivantes consistent à calculer le relaxé de  $(VP_\omega)$ , soit

$$\bar{m} = \inf_U \left\{ \int_0^T \int_\Omega CQW(t, x, \nabla U(t, x), s(x)) dx dt \right\}$$

où l'infimum est pris sur les champs  $U \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$  qui satisfont les conditions aux limites et où la fonction  $s$  satisfait  $s \in S_L$ . La quantité  $CQW(x, U, \nabla U(t, x), s(x))$  désigne le *quasi-convexifié contraint* de la densité  $W$ , défini pour tout  $(F, s) \in \mathcal{M}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}$  fixe, par

$$CQW(x, U, F, s) = \inf_\nu \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} W(x, U, M) d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}(F, s) \right\},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(F, s) &= \left\{ \nu : \nu \text{ est une } H^1 \text{ - mesure de Young homogène,} \right. \\ &\quad \left. F = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} M d\nu(M) \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} V(M) d\nu(M) = s \right\}. \end{aligned}$$

La difficulté est que la classe des mesures  $\mathcal{A}(F, s)$  n'est pas explicitement connue. La seconde étape consiste alors à résoudre le problème de minimisation précédent sur la classe plus large et explicite  $\mathcal{A}^*$  des mesures polyconvexes. Ce calcul se ramène à la résolution d'un problème de programmation mathématique linéaire en les premiers et seconds moments de  $\nu$ . Le polyconvexifié obtenu, noté  $CPW$  fournit une borne inférieure du minimum  $\bar{m}$ .

- La troisième et dernière étape consiste à étudier si cette borne inférieure est atteinte par au moins une mesure appartenant à la classe, disons  $\mathcal{A}_*$  (les laminés), incluse dans  $\mathcal{A}(F, s)$ , de telle façon que  $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ . Dans un tel cas, on en déduit alors la valeur exacte de  $CQW$ . Cette étape se ramène à chercher une condition de rang un sur les mesures. Enfin, les laminés caractérisent la micro-structure optimale.

L'analyse pour le problème  $(P_\omega)$  conduit à un laminé de rang 1. L'analyse dans le cas bi-dimensionnel est identique, à l'introduction de potentiels de Clebsch près, à la première étape. La résolution numérique du problème  $(RP_\omega)$  - plus aisée que la méthode des lignes de niveaux - confirme ce phénomène de bifurcation par rapport à la valeur de  $a$ . Si  $a$  est suffisamment petit, la densité optimale obtenue est une fonction caractéristique : le problème  $(RP_\omega)$  coïncide avec le problème originel  $(P_\omega)$  alors bien posé. Pour  $a$  suffisamment grand, la densité optimale est telle que l'ensemble  $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\}$  est de mesure non nulle : la distribution optimale est composée d'un nombre arbitrairement grand de composantes disjointes.

Cette analyse est généralisée au cas de l'opérateur d'élasticité linéaire pour lequel l'équation principale est :

$$\mathbf{u}'' - \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + a(x) \mathcal{X}_\omega(x) \mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad (0, T) \times \Omega$$

avec  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{Id} + \mu (\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T)$  le tenseur symétrique des contraintes. On s'affranchit de la dimension en espace en utilisant les mesures de Young *Div - Rot*, associées aux champs  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{u}' + a(x) \mathcal{X}_\omega(x) \mathbf{u}, -\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{G} = (\mathbf{u}', \nabla_x \mathbf{u})$$

tels que  $\nabla_{t,x} \cdot \mathbf{F} = 0$  et  $\text{Rot } \mathbf{G} = 0$ . A nouveau, la relaxation est simplement obtenue en remplaçant l'ensemble  $\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)=L|\Omega|}\}$  par l'ensemble  $\{s \in L^\infty(\Omega, [0, 1]), \|s\|_{L^1(\Omega)=L|\Omega|}\}$ .

La situation est plus difficile lorsque la fonction de forme  $\mathcal{X}_\omega$  est présente dans l'opérateur de divergence. Une analyse détaillée du problème suivant -généralisant une situation statique très étudiée - est effectuée :

$$(P) : \quad \inf_{\mathcal{X} \in L^\infty((0,T) \times \Omega, \{0,1\})} I(\mathcal{X}), \quad I(\mathcal{X}) = \int_0^T \int_\Omega \left[ u_t^2(t, x) + a(t, x, \mathcal{X}) u_x^2(t, x) \right] dx dt$$

où  $\Omega = (0, 1)$  et  $u$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} u_{tt} - \text{div}([\alpha \mathcal{X} + \beta(1 - \mathcal{X})]u_x) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{dans } (0, T). \end{cases}$$

La fonction  $\mathcal{X} \in L^\infty([0, T] \times \Omega; \{0, 1\})$  désigne la variable de forme et indique la position du matériau de caractéristique  $\alpha$  au temps  $t$ . On suppose  $0 < \alpha < \beta$  et  $a(t, x, \mathcal{X}) = \mathcal{X}(t, x)a_\alpha(t, x) + (1 - \mathcal{X}(t, x))a_\beta(t, x)$ , avec  $a_\alpha, a_\beta \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ . Enfin, on suppose que la quantité du matériau de caractéristique  $\alpha$  est contrainte par la condition  $\int_\Omega \mathcal{X}(t, x) dx \leq V_\alpha |\Omega|$ , pour tout  $t \in (0, T)$ . Le problème (P) a donc pour objectif d'optimiser la répartition spatio-temporelle de deux matériaux de conductivité  $\alpha$  et  $\beta$  au sein d'une corde vibrante. La notion de matériaux dynamiques a été introduite récemment par K.A. LURIE. Le processus de relaxation conduit au problème suivant :

$$(RP) : \quad \min_{U, s} \int_0^T \int_\Omega \varphi(t, \mathbf{x}, \nabla U(t, \mathbf{x}), s(t, \mathbf{x})) dx dt$$

soumis à

$$\begin{cases} U \in H^1([0, T] \times \Omega)^2, \quad \text{tr}(\nabla U(t, \mathbf{x})) = 0, \\ U^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad U_t^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ U^{(1)}(t, 1) = U^{(1)}(t, 0) = 0 & \text{dans } [0, T], \\ 0 \leq s(t, \mathbf{x}) \leq 1, \quad \int_\Omega s(t, \mathbf{x}) dx \leq V_\alpha |\Omega| \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où  $\varphi$  - le quasi-convexifié - est explicitement donné en fonction de  $U, \alpha, \beta$  et  $a_\alpha, a_\beta$ . A nouveau,  $U = (u, v)$  où est une variable auxiliaire qui apparaît dans l'étape de reformulation variationnelle.  $\text{Tr}$  désigne l'opérateur trace et  $\nabla = (\partial_t, \partial_x)$ . De plus, les micro-structures optimales sont représentées par des laminés d'ordre un et deux, selon notamment les valeurs de  $a_\alpha$  et  $a_\beta$ . Bien qu'explicite, cette formulation est peu manipulable dans la mesure où l'équation des ondes a disparu et se trouve incorporée dans les contraintes définissant  $\varphi$ . Dans certains cas simples, typiquement  $(a_\alpha, a_\beta) = (\alpha, \beta)$  et  $(a_\alpha, a_\beta) = (1, 1)$ , il est néanmoins possible d'éliminer la variable auxiliaire  $U^{(2)}$  et ainsi de reformuler (RP) de façon plus standard : cela fait apparaître les moyennes harmonique et arithmétique de  $(\alpha, \beta)$ . Les simulations numériques effectuées montrent l'influence de la donnée initiale  $(y^0, y^1)$  et de l'amplitude de l'écart  $\beta - \alpha$  sur la nature de la distribution optimale, laquelle rend le système globalement fortement dissipatif. La combinaison des deux problèmes précédents

$$(P_{\omega_1, \omega_2}) \quad \inf_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + a(t, \mathbf{x}, \mathcal{X}_{\omega_1}) |u_x|^2) dx dt$$

avec  $\mathcal{X}_{\omega_1} \in L^\infty(\Omega \times (0, T); \{0, 1\})$ ,  $\mathcal{X}_{\omega_2} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  où  $u$  est la solution unique de

$$u_{tt} - \nabla_x([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})]u_x) + a(\mathbf{x}) \mathcal{X}_{\omega_2} u_t = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

est ensuite discutée. Il s'agit d'optimiser simultanément la distribution spatio-temporelle du matériau  $\alpha$  sur  $\omega_1 \subset \Omega \times (0, T)$  et de la distribution statique de la zone d'amortissement  $\omega_2 \subset \Omega$ . Pour toute valeur de  $a$ , il apparaît que la micro-structure optimale est donnée par des laminés d'ordre un uniquement. Cela illustre l'effet régularisant du terme de dissipation sur la micro-structure optimale et indique également le caractère *instable* des laminés d'ordre deux exhibés dans le problème (P). Enfin, dans le cadre de l'équation de la

chaleur posée sur  $\Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , le flux de chaleur est minimisé par rapport à la distribution de deux conductivités thermiques distinctes. La méthode de l'homogénéisation - développée dans ce cadre par GRÉGOIRE ALLAIRE et l'approche variationnelle sont respectivement utilisées, dans le cas d'une distribution statique et dynamique.

Cette seconde partie fait également le lien avec la précédente en introduisant un problème d'optimisation de forme dans le cadre de la contrôlabilité exacte interne pour l'équation des ondes : précisément, si  $v_\omega$  désigne, pour tout  $\omega$  fixé, le contrôle HUM supporté sur  $\omega \times (0, T)$ , nous cherchons le domaine  $\omega$  de mesure  $L|\Omega|$ , solution du problème suivant :

$$(0.0.1) \quad (\mathcal{P}_\omega) : \inf_{\omega \subset V_L(y^0, y^1, T)} J(\mathcal{X}_\omega), \quad \text{où } J(\mathcal{X}_\omega) = \frac{1}{2} \|v_\omega\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2,$$

et  $V_L(y^0, y^1, T) = \{\omega \in V(y^0, y^1, T); |\omega| = L|\Omega|\}$ .  $V(y^0, y^1, T)$  est l'ensemble des domaines qui satisfont la condition d'optique géométrique. Le temps de contrôlabilité  $T$  ainsi que la mesure  $|\omega|$ , fixés, peuvent être arbitrairement petits. Les expériences numériques suggèrent, pour des données  $(y^0, y^1)$  régulières, que le problème  $(\mathcal{P}_\omega)$  est bien posé dans la classe des fonctions caractéristiques. Enfin, nous vérifions que les domaines optimaux permettent une réduction de la constante d'observabilité associée au système adjoint.

La fin de cette seconde partie est consacrée à des problèmes d'optimisation dans le cadre de la mécanique de la rupture : nous introduisons la notion de contrôle de fissure. Les équations sont indépendantes du temps. La quantité optimisée est le taux de restitution de l'énergie, égal dans le cadre scalaire du laplacien, à

$$g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = \int_{\Omega} a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x})(A_\psi(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u)dx, \quad A_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 2\psi_{1,2} \\ 0 & -\psi_{1,1} \end{pmatrix}$$

où  $\psi$  est une fonction à support compact, définie sur un domaine  $\Omega$  fissuré. La quantité  $g_\psi$ , positive mais non définie positive, est une mesure de la singularité du champ  $u$  en pointe de fissure. Un critère mécanique dû à A.A. GRIFFITH postule la propagation de la fissure dès que ce taux atteint un seuil. Dans un premier travail, dans le cadre de l'élasticité linéaire en petits déplacements, nous minimisons ce taux par rapport à l'amplitude et la position d'une contre-force agissant sur une partie de la frontière distincte du support du chargement initial. L'étude, prenant en compte la condition de contact unilatéral sur les lèvres de la fissure, met en évidence la compétition entre le mode I d'ouverture et le mode II de cisaillement. Dans un second travail, dans le cadre du laplacien, nous minimisons ce taux, par rapport à la distribution de deux matériaux de conductivité thermique  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce cas,  $u$  est la solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}([\alpha\mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}) + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}))]\nabla u) = 0 & \Omega, \\ u = u_0 & \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \beta \nabla u \cdot \mathbf{v} = g & \Gamma_g \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

Une formulation relaxée de ce problème est obtenue en remplaçant  $g_\psi(u, \mathcal{X})$  par  $g_\psi(v, s)$  où  $v$  est solution du problème non linéaire

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(s)\nabla v + B(s)|\nabla v|t) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \beta \nabla v \cdot \mathbf{v} = g, & \text{sur } \Gamma_g. \end{cases}$$

avec  $A(s), B(s) = (\lambda^+(s) \pm \lambda^-(s))/2$ , équivalent au précédent si et seulement si la densité  $s$  optimale est une fonction caractéristique. Il apparaît que la conductivité optimale n'est pas uniforme autour de la pointe de fissure.  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  désignent les moyennes arithmétique et harmonique de  $(\alpha, \beta)$  pondérées par  $s$ .

★ ★ ★

Le document s'achève par une description brève de quelques perspectives et problèmes ouverts.

# Chapitre 1

## Contrôlabilité exacte, Stabilisation et Approximation Numérique

### 1.1 Introduction

Je résume dans ce chapitre quelques contributions à la thématique de la contrôlabilité / stabilisation pour des problèmes dynamiques, précisément via des aspects numériques. Initialement, les études ont eu pour cadre l'équation des ondes homogènes

$$(1.1.1) \quad y''(t, \mathbf{x}) - \Delta y(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$$

posée sur le cylindre  $(0, T) \times \Omega$ ,  $\Omega$  désignant un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . L'état  $y$  étant soumis à une excitation initiale  $(y^0, y^1)$  à l'instant  $t = 0$ , la *contrôlabilité* est l'action d'agir sur le système au cours des temps  $t \in (0, T)$  de façon à amener  $(y, y')$  dans un état donné à l'instant  $T$  (voir [FCZ04]). On parle de contrôlabilité à zéro (ou nulle contrôlabilité) lorsque la cible est  $(0, 0)$ , c'est-à-dire :

$$(1.1.2) \quad (y(T, \mathbf{x}), y'(T, \mathbf{x})) = (0, 0), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega,$$

ce qui implique  $y(t, \cdot) \equiv 0$  pour tout  $t \geq T$ .  $T$  est le temps de contrôlabilité. Il est d'usage d'atteindre cet objectif en associant à l'état  $y$  une variable de contrôle  $v$ , définie soit sur une partie  $\Gamma_0$  de la frontière - c'est la *contrôlabilité frontière* - soit sur un sous-domaine  $\omega$  de  $\Omega$  - c'est la *contrôlabilité interne* (ou *distribuée*). Par exemple, dans le cas d'un contrôle Dirichlet frontière, on considère

$$(1.1.3) \quad y(t, \mathbf{x}) = v(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_0, \quad \Gamma_0 \subset \partial\Omega.$$

Un aspect fondamental inhérent à ce type d'équation hyperbolique est que la contrôlabilité ne peut avoir lieu, uniformément en les données initiales, si le temps de contrôlabilité  $T$  est trop petit ou si le support ( $\Gamma_0$  ou  $\omega$ ) du contrôle ne vérifie pas de précises propriétés géométriques.

De façon liée - dans ce cas linéaire - à la notion de contrôlabilité est la notion de *stabilisation*, ici encore interne ou frontière. On peut qualifier l'action de *passive* car directement exprimée en terme de la solution : l'exemple le plus simple est celui de l'équation des ondes amorties (voir par exemple [LG97]) :

$$(1.1.4) \quad y''(t, \mathbf{x}) - \Delta y(t, \mathbf{x}) + a(\mathbf{x})y'(t, \mathbf{x})X_\omega(\mathbf{x}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$$

où  $a$  est une fonction positive. A nouveau, si l'ouvert  $\omega$ , sous domaine de  $\Omega$ , support du terme dissipatif  $a(\mathbf{x})y'$ , bénéficie de propriétés géométriques, alors la norme de la solution  $y$  tend vers zéro lorsque la variable  $t$  tends vers l'infini : la solution se *stabilise* en temps long.

Ces notions sont bien connues depuis les années 80. Je renvoie aux ouvrages [Cor07, LT00, Lio88, Kom94, Rus78], et à leurs références.

La question de l'approximation numérique de la contrôlabilité, abordée ici, est plus récente. Il s'agit de reproduire qualitativement au niveau numérique les propriétés théoriques de contrôlabilité/stabilisation. Les travaux précurseurs de ROLAND GLOWINSKI et collaborateurs ([GKW89, GLL90, GL96]) ont montré que cette question est délicate. Ces travaux ont ensuite été repris, notamment par le groupe de ENRIQUE ZUAZUA (voir [Zua05] et ses références).

Cette première partie s'articule de la façon suivante. La section 1.2 fixe les notations puis décrit la méthode de dualité *Hilbert Uniqueness Method* introduite par JACQUES LOUIS LIONS dans le cadre de la contrôlabilité frontière (Section 1.2.1) puis interne (Section 1.2.2). De façon similaire, la section 1.3 traite le cas de la stabilisation interne. Ensuite, à partir de la section 1.4 on aborde les notions d'approximation numérique. La section 1.4.1 décrit un schéma numérique espace-temps implicite et uniformément contrôlable dans le cas unidimensionnel. La section 1.4.2 considère alors le cas semi-discret bi-dimensionnel (discrétisation en espace) étendu Section 1.4.3 au cas complètement discrétisé. Le cas analogue et important de la stabilisation est traité en Section 1.5. La stabilisation non linéaire d'une poutre est traitée théoriquement et numériquement (Section 1.6) tandis que la contrôlabilité des arches et coques élastiques minces est abordée en Section 1.7. Enfin, dans la section 1.8, je décris brièvement un travail récent sur la contrôlabilité d'une corde soumise à un obstacle unilatéral.

## 1.2 Quelques rappels sur la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

### 1.2.1 Contrôlabilité exacte frontière

Avant d'introduire des méthodes d'approximations, fixons quelques notations et rappelons succinctement la méthode *Hilbert Uniqueness Method* (en abrégé dans la suite HUM) introduite par J.-L. LIONS en 1986 et détaillée dans [Lio88] permettant d'explicitier simplement la contrôlabilité du système des ondes, dans les cas frontière et interne (on suit ici l'approche variationnelle exposée récemment dans [MZ04]).

On considère un domaine borné  $\Omega$  lipschitzien de  $\mathbb{R}^N$ ,  $T$  un réel strictement positif et  $\Gamma_0$  une partie non vide de la frontière de  $\Omega$ . Le problème de la contrôlabilité frontière à zéro se formule de la façon suivante : pour toute donnée  $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  et tout temps  $T > 0$  suffisamment grand, existe-t-il une fonction contrôle  $v \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)$  telle que la solution  $y \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C(0, T; H^{-1}(\Omega))$  du système suivant :

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y = v\chi_{\Gamma_0}, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y(0, \cdot), y'(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

soit au repos à l'instant  $T$ , c'est-à-dire vérifie la propriété :

$$(1.2.2) \quad (y(T, \cdot), y'(T, \cdot)) = (0, 0) \quad \text{dans } \Omega \quad ?$$

La notation  $\chi_{\Gamma_0}$ , utilisée constamment dans la suite, désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $\Gamma_0$ , de sorte que la fonction contrôle  $v$  agit seulement sur (le bord)  $\Gamma_0$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $T > 0$  et  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ . Le triplet  $(\Omega, \Gamma_0, T)$  satisfait la condition d'optique géométrique au temps  $T$  si et seulement si tout rayon évoluant dans  $\Omega$  à vitesse égale à un et se réfléchissant sur  $\partial\Omega$  en vérifiant les lois de l'optique géométrique, rencontre  $\Gamma_0$  en un temps inférieur à  $T$ .

On note  $(\Omega, \Gamma_0, T) \in \text{COG}$  pour signaler que le triplet satisfait cette condition d'optique géométrique.

**Remarque 1.2.2.** – Dans le cas  $N = 1$ ,  $\Gamma_0$  se réduit à un (resp. deux) point(s) et la condition se réduit à  $T > 2\text{diam}(\Omega)$  (resp.  $T > \text{diam}(\Omega)$ ), où  $\text{diam}(\Omega)$  désigne le diamètre de l'ouvert  $\Omega$ .

– La méthode des multiplicateurs utilisée dans [Lio88] conduit au support  $\Gamma_0$  défini par

$$(1.2.3) \quad \Gamma_0(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \geq 0\}$$

pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  où  $\nu$  désigne la normale extérieure à  $\Omega$ . Dans ce cas, la condition d'optique géométrique a lieu si et seulement si  $T > T^*(\mathbf{x}_0)$  défini par  $T^*(\mathbf{x}_0) = 2R(\mathbf{x}_0)$  où  $R(\mathbf{x}_0)$  désigne le rayon de la plus petite boule centrée en  $\mathbf{x}_0$  et contenant  $\Omega$ , supposé étoilé. ■

**Théorème 1.2.3.** Soient  $T, \Gamma_0$  et  $\Omega$  tels que  $(\Omega, \Gamma_0, T) \in GOC$ . Alors pour tout  $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe une fonction contrôle  $v \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)$  telle que la solution  $y$  de (1.2.1) vérifie (1.2.2). ■

On peut obtenir ce résultat, dans le cadre de la remarque 1.2.2, par la méthode de dualité HUM qui ramène ce problème de contrôlabilité à celui d'un problème de contrôle optimal. On introduit le problème homogène (dit adjoint) suivant :

$$(1.2.4) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (\phi(0, \cdot), \phi'(0, \cdot)) = (\phi^0, \phi^1), & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

pour toute donnée  $(\phi^0, \phi^1)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Multipliant l'équation en  $y$  par  $\phi$  et celle de  $\phi$  par  $y$ , intégrant sur  $(0, T) \times \Omega$  et supposant (1.2.2), on obtient formellement que  $v$  est un contrôle pour (1.2.1) si et seulement si

$$(1.2.5) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_0} v(t, \mathbf{x}) \frac{\partial\phi(t, \mathbf{x})}{\partial\nu} d\sigma dt = \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \int_{\Omega} y^0 \phi^1 dx$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le crochet de dualité entre les espaces  $H^{-1}$  et  $H_0^1$ . Cette caractérisation suggère alors d'introduire la fonctionnelle  $J : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(1.2.6) \quad J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial\phi(t, \mathbf{x})}{\partial\nu} \right|^2 d\sigma dt - \langle y^1, \phi^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_{\Omega} y^0 \phi^1 dx.$$

**Théorème 1.2.4.** Sous les conditions du théorème 1.2.3,  $J$  admet un unique minimum  $(\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Par ailleurs, si  $\widehat{\phi}$  est la solution de (1.2.4) associée à ce minimum  $(\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1)$ , alors

$$(1.2.7) \quad v(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial\widehat{\phi}(t, \mathbf{x})}{\partial\nu}, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_0$$

est le contrôle de norme  $L^2$ -minimale pour (1.2.1). ■

La fonctionnelle  $J$  est continue et strictement convexe sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Le théorème précédent résulte de la coercivité de  $J$ , qui s'énonce ainsi : il existe une constante strictement positive  $C$  dépendante de  $T$  et de  $\Gamma_0$  telle que

$$(1.2.8) \quad \|\phi^0, \phi^1\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C(T, \Gamma_0) \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial\phi(t, \mathbf{x})}{\partial\nu} \right|^2 d\sigma dt, \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Le terme de gauche est équivalent à l'énergie du système :

$$(1.2.9) \quad E(\phi, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2) dx, \quad \forall t > 0$$

constante (le système (1.2.4) est conservatif) sur toutes les trajectoires :

$$(1.2.10) \quad E(\phi, t) = E(\phi, 0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi^1|^2 + |\nabla\phi^0|^2) dx, \quad \forall t > 0.$$

(1.2.8) est appelée une *inégalité d'observabilité* pour le problème adjoint (1.2.4) : on peut *observer* la solution  $\phi$  sur tout le domaine en agissant seulement sur une partie  $\Gamma_0$ , mais en contrepartie, à tous les instants entre 0 et  $T$ . Dans le cas  $N = 1$ , cette inégalité se démontre directement en utilisant la décomposition de la solution  $\phi$  en terme de séries de Fourier. Dans le cas général, la technique des multiplicateurs permet de l'obtenir.

**Remarque 1.2.5.** La régularité cachée  $\partial\phi/\partial\nu \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)$  est une conséquence de l'inégalité directe : pour tout  $T > 0$  et tout  $\Gamma_0 \in \partial\Omega$ , il existe une constante  $C$  positive telle que

$$(1.2.11) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial\phi(t, \mathbf{x})}{\partial\nu} \right|^2 d\sigma dt \leq CE(\phi, 0), \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

inégalité qui s'obtient également avec la méthode des multiplicateurs. ■

### 1.2.2 Contrôlabilité exacte distribuée

De façon similaire, la méthode HUM permet d'obtenir la contrôlabilité interne (ou distribuée) au temps  $T$  lorsque la fonction contrôle  $v$  agit sur un sous-domaine  $\omega$  strictement inclus dans  $\Omega$ . Dans ce cas, le support  $\omega$  doit vérifier la condition d'optique géométrique de la définition 1.2.1, c'est-à-dire que  $(\Omega, \omega, T) \in COG$  : tout rayon se propageant dans  $\Omega$  selon les propriétés de l'optique géométrique doit rencontrer le domaine  $\omega$  en un temps inférieur à  $T$ .

On définit le problème suivant : pour toute donnée initiale  $(y^0, y^1)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on cherche un contrôle dans  $L^2((0, T) \times \omega)$  tel que la solution  $y \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$  du problème suivant

$$(1.2.12) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = \mathcal{X}_\omega v, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y(0, \cdot), y'(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

satisfasse (1.2.2).  $\mathcal{X}_\omega$  désigne la fonction caractéristique du domaine  $\omega$  dans  $\Omega$ . A nouveau, la méthode HUM ramène ce problème de contrôlabilité à un problème de contrôle optimal, introduisant la fonctionnelle  $J : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.2.13) \quad J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \phi^2(t, \mathbf{x}) dx dt - \int_\Omega y^1 \phi^0 dx + \langle y^0, \phi^1 \rangle_{H_0^1, H^{-1}}.$$

La contrôlabilité repose alors sur l'existence d'une constante  $C$  positive telle que l'inégalité d'observabilité suivante :

$$(1.2.14) \quad \|(\phi^0, \phi^1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 \leq C(\omega, T) \int_0^T \int_\omega \phi^2(t, \mathbf{x}) dx dt$$

ait lieu pour toute donnée initiale  $(\phi^0, \phi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  de  $\phi$  solution de (1.2.4). A nouveau, cette inégalité s'obtient en utilisant la méthode des multiplicateurs.

**Théorème 1.2.6.** Soient  $\Omega, \omega$  et  $T$  tels que  $(\Omega, \omega, T) \in COG$ . Pour toute donnée  $(y^0, y^1)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , il existe un contrôle  $v \in L^2((0, T) \times \omega)$  tel que la solution  $y$  de (1.2.12) satisfasse  $y(T, \cdot) = y'(T, \cdot) = 0$  dans  $\Omega$ . ■

**Remarque 1.2.7.** Il est important de remarquer que l'inégalité d'observabilité (1.2.14) est triviale si  $\omega = \Omega$ . Dans ce cas, la contrôlabilité exacte a lieu pour tout temps  $T > 0$  arbitraire. ■

### 1.3 Stabilisation interne

Un cas simple et très étudié de système dynamique dissipatif est celui de l'équation des ondes localement amorties ([LG97]) :

$$(1.3.15) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y' = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y(0, \cdot), y'(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ ,  $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . L'énergie vérifie la loi de dissipation

$$(1.3.16) \quad E'(y, t) = \int_\omega a(\mathbf{x})|y'|^2 dx, \quad \forall t > 0.$$

**Théorème 1.3.1.** Si le triplet  $(\Omega, \omega, T)$  vérifie l'hypothèse d'optique géométrique, alors il existe deux constantes  $C$  et  $\alpha$  strictement positives telles que

$$(1.3.17) \quad E(y, t) \leq CE(y(0), 0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

$\alpha$  est le taux de décroissance exponentielle. ■

On renvoie à [Har89, Zua90] pour la preuve. On obtient un résultat similaire dans le cas d'une dissipation frontière en imposant une condition d'absorption du type  $\nabla y \cdot \nu = -a(x)y'$  sur  $(0, T) \times \Gamma_0 \subset (0, T) \times \partial\Omega$ , avec  $a \in L^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R}^+)$ . Nous présentons dans la section 1.5 une version discrète du théorème 1.3.1.

#### 1.4 Approximation numérique de la contrôlabilité

On s'intéresse maintenant à l'approximation numérique du contrôle motivée par les travaux précurseurs de R. GLOWINSKI et co-auteurs au début des années 90, principalement [GKW89, Glo91, GLL90, GL96]. De façon générale, la problématique est la suivante : on se donne une perturbation de l'équation des ondes

$$(1.4.18) \quad \begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\delta, \\ y_\delta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_\delta, \\ (y_\delta(\cdot, 0), y_\delta'(\cdot, 0)) = (y_\delta^0, y_\delta^1), & \text{dans } \Omega_\delta, \end{cases}$$

paramétrée par le réel  $\delta$  destiné à tendre vers zéro. Supposons que cette perturbation soit consistante avec le système initial et que la solution  $y_\delta$  tende vers  $y$  - solution de l'équation des ondes - lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . On introduit alors une fonction (par exemple) frontière sur  $\Gamma_0$  :

$$(1.4.19) \quad y_\delta = v_\delta \chi_{\Gamma_0}, \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega$$

de façon à ce que  $y_\delta(T, \cdot) = y_\delta'(T, \cdot) = 0$  dans  $\Omega$ . Deux questions apparaissent :

1. Pour  $\delta$  fixé, le système perturbé est-il exactement contrôlable ?
2. Quel est le comportement du contrôle  $v_\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  ?

Dans notre cas, le système perturbé dérive de l'approximation numérique de sorte que  $\delta = h$  dans la version semi-discrétisée en espace et  $\delta = (h, \Delta t)$  dans la version complètement discrétisée. Dans la suite,  $h$  et  $\Delta t$  désignent les paramètres de discrétisation en espace et en temps. Le point 1 résulte alors que du fait que le système perturbé est de dimension finie. Le point 2 est plus délicat. Les travaux de R. GLOWINSKI cités plus haut ont mis en évidence que la convergence de  $v_\delta$  dépend de l'approximation (consistante) et de la régularité des données initiales  $(y_\delta^0, y_\delta^1)$ . Pour les approximations *standards*, il apparaît que le contrôle HUM-discrétisé ne converge pas vers le contrôle HUM du système continu, ce que l'on représente par le schéma 1.1 : approximation numérique et contrôlabilité exacte ne *commutent pas*. Quelques méthodes numériques efficaces ont alors été proposées, implémentées (voir [GKW89, Glo91, GLL90, GL96]), puis plus récemment analysées d'un point de vue théorique (voir [Zua05, Zua06] pour deux synthèses récentes et complètes). L'analyse - principalement au niveau semi-discret - de ces méthodes de type *multi-grille*, *élément fini mixte* ou bien encore *régularisation de Tychonoff*, met en évidence le rôle des hautes fréquences. Dans la section suivante, je décris une discrétisation en espace et en temps menant à un schéma uniformément contrôlable.

##### 1.4.1 Un schéma implicite uniformément contrôlable pour l'équation des ondes 1-D - Discrétisation en temps et en espace

On résume ici [14, 15] et on considère l'équation des ondes 1-D avec  $\Omega = (0, 1)$  :

$$(1.4.20) \quad (\mathcal{S}) \begin{cases} y'' - y_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, 1) = v(t), & 0 < t < T, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y'(0, x) = y_1(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

avec  $v$  tel que

$$(1.4.21) \quad y(T, x) = y'(T, x) = 0, \quad \forall 0 < x < 1.$$

Formellement, on lui associe le schéma

$$(1.4.22) \quad (\mathcal{S}_{h,\Delta t}) \begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, \\ + \text{Données initiales et conditions de bords,} \end{cases}$$



où  $\Delta_{\Delta t}$  (resp.  $\Delta_h$ ) désigne l'approximation aux *différences finies* centrées trois points de la dérivée seconde en temps (resp. espace).

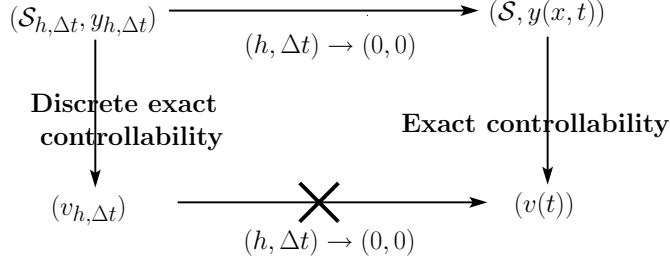


FIG. 1.1: Diagramme de non commutativité associé au schéma usuel  $(S_{h,\Delta t})$  pour  $\Delta t < h$ .

Pour  $(h, \Delta t)$  fixé, le contrôle discret HUM  $v_{h,\Delta t}$  de (1.4.22) existe mais diverge lorsque  $(h, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$  (voir Figure 1.1). Dans [15] (annoncé partiellement dans [14]), il est montré en revanche que le schéma suivant

$$(1.4.23) \quad (\bar{S}_{h,\Delta t}) \begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} + \frac{1}{4}(h^2 - \Delta t^2) \Delta_h \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, \\ + \text{Données initiales et conditions de bords} \end{cases}$$

sous la condition

$$(1.4.24) \quad T > 2 \max\left(1, \frac{\Delta t^2}{h^2}\right)$$

produit un contrôle discret uniformément borné et convergeant vers le contrôle continu : ce schéma permet ainsi de restaurer la propriété de commutativité entre approximation numérique et contrôlabilité (voir Figure 1.2). Avant de détailler ce résultat, faisons quelques remarques :

**Remarque 1.4.1.** – Formellement, le schéma précédent est la discrétisation aux différences finies usuelle de l'équation

$$(1.4.25) \quad y'' - \Delta y + \epsilon(h) \Delta y'' = 0, \quad \text{dans } (0, T) \times (0, 1)$$

avec  $\epsilon(h) = 1/4(h^2 - \Delta t^2)$ , contenant ainsi un terme d'ordre 4, proportionnel à  $(h^2 - \Delta t^2)$ . A  $\epsilon(h)$  positif fixé, cette équation, contenant ce terme singulier d'ordre 4, n'est pas exactement contrôlable, car il apparaît un spectre essentiel fini (point d'accumulation de valeurs propres  $\lambda_k$  telles que  $\lambda_k^2 = (k\pi)^2 / (1 - \epsilon(h)(k\pi)^2)$ ).

- Le schéma  $(\bar{S}_{h,\Delta t})$  coïncide avec le schéma usuel  $(S_{h,\Delta t})$  si et seulement si  $h = \Delta t$ , auquel cas ce dernier est exact et donc uniformément contrôlable pour tout  $T > 2$ .
- La condition de contrôlabilité uniforme (1.4.24) est équivalente à

$$(1.4.26) \quad 0 < \frac{\Delta t}{h} < \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

Le schéma  $(\bar{S}_{h,\Delta t})$ , uniformément contrôlable permet ainsi de relaxer la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) de stabilité usuelle. ■

L'obtention du schéma (1.4.23), *a priori* peu intuitif, est constructive. Dans ce cas 1-D, la démarche est en fait assez simple : il s'agit de déterminer un schéma convergeant pour l'équation des ondes et dont le spectre de l'opérateur discret satisfait une propriété, dite d'*écart uniforme*. Pour cela, il *suffit* en pratique de *redresser* le spectre pour les hautes fréquences : cependant cela a pour effet de détériorer significativement la condition CFL, rendant le schéma obtenu peu exploitable en pratique. Il y a donc un *compromis* entre contrôlabilité uniforme (c'est-à-dire convergence du contrôle  $v_{h,\Delta t}$ ) et stabilité (c'est-à-dire convergence de la solution  $y_{h,\Delta t}$ ).



**Remarque 1.4.2.** –  $\theta = \alpha = 0$  conduit à  $\theta_v = 0$ . Le schéma  $(S_{h,\Delta t}^{0,0})$  correspond au schéma aux différences finies centrées usuel.

–  $(S_{h,\Delta t}^{0,\alpha})$  correspond à un schéma de Newmark (voir [RT83]) permettant d'améliorer la stabilité. ■

Afin d'écrire  $(S_{h,\Delta t}^{\theta_v,0})$  sous forme vectorielle, on note  $K \in \mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$  la matrice tri-diagonale

$$(1.4.33) \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ (0) & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{pmatrix}_{J \times J},$$

et  $M_0^{\theta_v} \in \mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$  la matrice de masse :

$$(1.4.34) \quad M_0^{\theta_v} = I - \theta_v K.$$

En notant  $\mathbf{Y}_h^n$ , le vecteur  $(y_1^n, y_2^n, \dots, y_J^n)^T$ ,  $n = 0, \dots, N$ ,  $(S_{h,\Delta t}^{\theta_v,0})$  prend la forme :

$$(1.4.35) \quad \begin{cases} M_0^{\theta_v} (\mathbf{Y}_h^{n+1} - 2\mathbf{Y}_h^n + \mathbf{Y}_h^{n-1}) + v^2 K \mathbf{Y}_h^n = \mathbf{F}_h^n, & 0 \leq n \leq N, \\ \frac{\mathbf{Y}_h^0 + \mathbf{Y}_h^1}{2} = \mathbf{y}_0 h, \quad \frac{\mathbf{Y}_h^1 - \mathbf{Y}_h^0}{\Delta t} = \mathbf{y}_1 h, \end{cases}$$

où  $\mathbf{F}_h^n = (f_1^n, \dots, f_{J-1}^n, f_J^n)$  avec  $f_j^n = 0$ ,  $j = 1 \dots J - 1$  et

$$(1.4.36) \quad f_J^n = -\theta_v (v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}) + v^2 v_h^n, \quad 0 \leq n \leq N,$$

prenant en compte  $y_{J+1}^n = v_h^n$  et  $y_0^n = 0$  pour  $n = 0 \dots N$ .

**Définition 1.4.3.** Soit  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^J$ . On définit les produits scalaires

$$(1.4.37) \quad \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{j=1}^J U_j V_j, \quad (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = h \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.$$

**Définition 1.4.4.** Soit  $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{2J}$  et  $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}}) \in \mathbb{R}^{2J}$ . On définit les produits symétriques sur  $\mathbb{R}^{2J}$

$$(1.4.38) \quad \begin{aligned} ((\mathbf{U}, \mathbf{V}), (\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}}))_0 &\equiv (K_h \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{U}) + (M_0^{\theta_v} \tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}), \\ ((\mathbf{U}, \mathbf{V}), (\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}}))_1 &\equiv (K_h \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{U}) + (M_1^{\theta_v} \tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \end{aligned}$$

avec

$$(1.4.39) \quad M_1^{\theta_v} = M_0^{\theta_v} - \frac{v^2}{4} K, \quad K_h = \frac{K}{h^2}.$$

Finalement, on introduit le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$  :

**Définition 1.4.5** (Paramètres de stabilité).

$$(1.4.40) \quad \mathcal{S} = \left\{ (\theta, \alpha, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) (v^2 (1 - 4\alpha) + 4\theta) \leq 1, \forall h > 0 \right\}.$$

### Contrôlabilité - Notations et résultats

La contrôlabilité discrète se définit de la façon suivante : étant donné  $T$  suffisamment grand et  $(\mathbf{y}_{0h}, \mathbf{y}_{1h}) \in \mathbb{R}^{2J}$ , existe-t-il une fonction  $(v_h^n)_{n=0 \dots N}$  telle que la solution  $\mathbf{Y}_h^n$  de (1.4.35) satisfasse

$$(1.4.41) \quad \mathbf{Y}_h^N = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{Y}_h^N - \mathbf{Y}_h^{N-1}}{\Delta t} = \mathbf{0},$$

autrement dit  $\mathbf{Y}_h^N = \mathbf{Y}_h^{N-1} = \mathbf{0}$ ? Si cela a lieu pour tout  $(\mathbf{y}_{0h}, \mathbf{y}_{1h}) \in \mathbb{R}^{2J}$ , on dit que le système (1.4.35) est exactement contrôlable.

Ce problème de contrôle en dimension finie admet une réponse positive et une séquence de contrôle  $(v_h)_{h>0}$  peut-être déterminée. On adapte pour cela la méthode HUM au niveau discret. On introduit à cet effet un développement en série de Fourier des données initiales  $(\mathbf{y}_{0h}, \mathbf{y}_{1h})$  de (1.4.35). Les valeurs propres  $\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}$ ,  $k = 1, \dots, J$  du système (1.4.35) sont données, pour tout  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{S}$ , par :

$$(1.4.42) \quad \lambda_{k,h}^{\theta,\alpha} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left( \frac{\nu \sin(k\pi h/2)}{\sqrt{1 - 4(\theta - \alpha\nu^2) \sin^2(k\pi h/2)}} \right) \right]^2, \quad \forall k = 1, \dots, J,$$

telles que  $0 < \lambda_{1,h}^{\theta,\alpha} < \lambda_{2,h}^{\theta,\alpha} < \dots < \lambda_{J,h}^{\theta,\alpha}$  tandis que les fonctions propres  $(\phi_{k,h})_{(1 \leq k \leq J)}$  sont  $\phi_{k,h} = (\phi_{k,j})_{(1 \leq j \leq J)}$ , avec  $\phi_{k,j} = \sin(k\pi jh)$ . On suppose alors que les données  $(\mathbf{y}_{0h}, \mathbf{y}_{1h})$  se décomposent de la façon suivante :

$$(1.4.43) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}_{0h} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^J \left[ \bar{a}_{k,h} (1 + \cos(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} \Delta t)) + \frac{\bar{b}_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}} \sin(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} \Delta t) \right] \phi_{k,h}, \\ \mathbf{y}_{1h} &= \sum_{k=1}^J \left[ \bar{a}_{k,h} \frac{\cos(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} \Delta t) - 1}{\Delta t} + \frac{\bar{b}_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} \Delta t)}{\Delta t} \right] \phi_{k,h}. \end{aligned}$$

Alors  $\mathbf{Y}_h^n$  prend la forme :

$$(1.4.44) \quad \mathbf{Y}_h^n = \sum_{k=1}^J \left[ \bar{a}_{k,h} \cos(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} n \Delta t) + \frac{\bar{b}_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}} \sin(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} n \Delta t) \right] \phi_{k,h}.$$

Dans la suite  $(\bar{a}_{k,h})_{(k>0)}$  et  $(\bar{b}_{k,h})_{(k>0)}$  désignent les coefficients des séries de Fourier étendus par zéro, i.e.  $\bar{a}_{k,h} = \bar{b}_{k,h} = 0$  pour  $k > J$ .

Soit enfin une fonction  $\rho \in C_c^\infty([0, T])$  telle que  $\rho(t) = 1$  pour  $t \in [\epsilon, T - \epsilon]$  et  $\epsilon > 0$ . En prenant  $\epsilon = 2\Delta t$ , on approche cette fonction par  $\rho^n = \rho(n\Delta t) = 1$  pour  $n \in [2, N - 2]$  et  $\rho^n = 0$  sinon. Par ailleurs, on introduit la fonction  $J_h : \mathbb{R}^{2J} \rightarrow \mathbb{R}$ , discrétisée de  $J$  (voir eq. 1.2.6) :

$$(1.4.45) \quad \begin{aligned} J_h(\mathbf{w}_{0h}, \mathbf{w}_{1h}) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \left( \frac{W_J^n}{h} \right)^2 + \rho^n \theta_\nu \left( \frac{W_J^{n+1} - W_J^n}{\Delta t} \right)^2 \right] \\ &\quad - \left( \left( -K_h^{-1} M_0^{\theta_\nu} \mathbf{y}_{1h}, (M_1^{\theta_\nu})^{-1} M_0^{\theta_\nu} \mathbf{y}_{0h} \right), \left( \frac{W_h^0 + W_h^1}{2}, \frac{W_h^1 - W_h^0}{\Delta t} \right) \right)_1, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{W}_h^n$  est la solution du système homogène adjoint :

$$(1.4.46) \quad \begin{cases} M_0^{\theta_\nu} (\mathbf{W}_h^{n+1} - 2\mathbf{W}_h^n + \mathbf{W}_h^{n-1}) + \nu^2 K \mathbf{W}_h^n = 0, & 0 \leq n \leq N, \\ \frac{W_h^{N-1} + W_h^N}{2} = \mathbf{w}_{0h}, & \frac{W_h^N - W_h^{N-1}}{\Delta t} = \mathbf{w}_{1h}. \end{cases}$$

Soit enfin l'espace des paramètres (menant à la contrôlabilité uniforme).

**Définition 1.4.6** (Paramètres de contrôlabilité). Soit  $C = C_1 \cup C_2$  avec

$$(1.4.47) \quad \begin{aligned} C_1 &= \{(\theta, \alpha, \nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \theta = \alpha = 1/4\}, \\ C_2 &= \left\{(\theta, \alpha, \nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \nu = \sqrt{\frac{1-4\theta}{1-4\alpha}}, (1-4\alpha)(1-4\theta) > 0\right\}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.4.7.** On a  $C \subset \mathcal{S}$ . En fait,  $\alpha, \theta$  et  $\nu$  étant indépendants de  $h$ , on obtient facilement que

$$(1.4.48) \quad C = \left\{(\theta, \alpha, \nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \lim_{h \rightarrow 0} \cos^2(\pi h/2)(\nu^2(1-4\alpha) + 4\theta) = 1\right\}.$$

■

La relation entre la contrôlabilité de (1.4.35) et la fonctionnelle  $J_h$  est donnée par le théorème suivant, version discrète du théorème 1.2.4.

**Théorème 1.4.8.** Soit  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ . Pour tout  $T > 2 \max(1, \nu^2)$  et  $(\mathbf{y}_{0h}, \mathbf{y}_{1h}) \in \mathbb{R}^{2J}$ , la fonctionnelle  $J_h$  définie par (1.4.45) possède un unique minimum  $(\hat{\mathbf{w}}_{0h}, \hat{\mathbf{w}}_{1h}) \in \mathbb{R}^{2J}$ . Soit  $v_h = (v_h^n)_n$  défini par :

$$(1.4.49) \quad \begin{cases} v_h^n - \theta_\nu h^2 \frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\hat{W}_J^n}{h} - \theta_\nu h \frac{\rho^n \frac{\hat{W}_J^{n+1} - \hat{W}_J^n}{\Delta t} - \rho^{n-1} \frac{\hat{W}_J^n - \hat{W}_J^{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t}, & 0 \leq n \leq N, \\ \theta_\nu (v_h^1 - v_h^0) = 0, \quad \theta_\nu (v_h^N - v_h^{N-1}) = 0, \end{cases}$$

où  $\hat{W}_J^n$  est la solution de (1.4.46) avec donnée initiale  $(\hat{\mathbf{w}}_{0h}, \hat{\mathbf{w}}_{1h})$ . Alors,  $v_h = (v_h^n)_n$  est un contrôle pour (1.4.35). ■

Je renvoie à [15], Section 5 pour la démonstration. Concernant la convergence de ce contrôle, on introduit les opérateurs  $Q$  et  $P$  de  $v_h$  sur  $[0, T]$  par :

$$(1.4.50) \quad \begin{cases} Q(v_h) = \begin{cases} \text{fonction constante par morceaux dans chaque intervalle } [t_n, t_{n+1}[ \text{ telle que} \\ Q(v_h)(t_n) = v_h^n, & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \\ P(v_h) = \begin{cases} \text{fonction continue linéaire dans chaque intervalle } [t_n, t_{n+1}] \text{ telle que} \\ P(v_h)(t_n) = v_h^n, & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \end{cases}$$

La convergence du contrôle est alors donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.4.9.** Soient  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$  et  $T > 2 \max(1, \nu^2)$ . Soit  $(\mathbf{Y}_{0h}, \mathbf{Y}_{1h})$  une séquence discrète de la donnée initiale. Supposons que  $(a_{k,h}, b_{k,h})_k$ , les coefficients de Fourier de  $(\mathbf{Y}_{0h}, \mathbf{Y}_{1h})$ , vérifient

$$(1.4.51) \quad (a_{k,h})_k \rightarrow (a_k)_k, \quad \left( \frac{b_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta, \alpha}}} \right)_k \rightarrow \left( \frac{b_k}{k\pi} \right)_k \text{ dans } l^2 \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

où  $(a_k, b_k)$  sont les coefficients de Fourier des données  $(y_0, y_1)$ . Soit  $(v_h)_h$  une séquence de contrôle donnée par le théorème 1.4.8. Alors  $(Q(v_h))_h$  et  $(hP(v_h))_h$  sont uniformément bornés dans  $L^2(0, T)$ ,  $(h^2P(v_h))_h$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0, T)$  et il existe une sous-suite (dénotée de la même façon) et  $v \in L^2(0, T)$  tels que

$$(1.4.52) \quad \begin{aligned} Q(v_h) &\rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0, T) \text{ quand } h \rightarrow 0, \\ hP(v_h) &\rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(0, T) \text{ quand } h \rightarrow 0, \\ h^2P(v_h) &\rightharpoonup 0 \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ quand } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus, la limite  $v$  est le contrôle HUM pour le système continu (1.4.20). Si les convergences dans (1.4.51) sont fortes, alors les convergences le sont également. ■

**Problème homogène et observabilité uniforme**

La contrôlabilité dans ce cas linéaire se réduit à l'observabilité uniforme pour le système adjoint que nous étudions maintenant. On considère le système

$$(1.4.53) \quad (\mathcal{A}_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) \begin{cases} (1 + \theta_\nu h^2 \Delta_h) \Delta_{\Delta t} u_j^n = \Delta_h u_j^n, & 1 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n \leq N, \\ u_0^n = u_{J+1}^n = 0, & 0 \leq n \leq N, \\ (u_j^0 + u_j^1)/2 = u_{0j}, \quad (u_j^1 - u_j^0)/\Delta t = u_{1j}, & 0 \leq j \leq J+1, \end{cases}$$

et son écriture variationnelle :

$$(1.4.54) \quad \begin{cases} M_0^{\theta_\nu} (\mathbf{U}_h^{n+1} - 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}) + \nu^2 K \mathbf{U}_h^n = 0 & n = 0, \dots, N, \\ \frac{\mathbf{U}_h^0 + \mathbf{U}_h^1}{2} = \mathbf{u}_{0h}, \quad \frac{\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^0}{\Delta t} = \mathbf{u}_{1h} \end{cases}$$

avec  $\mathbf{U}_h^n = (u_1^n, \dots, u_J^n)^T$ .

**Définition 1.4.10.** L'énergie discrète  $E_n^{\theta,\alpha}$ ,  $n = 0, \dots, N$ , associée au schéma (1.4.53) est

$$(1.4.55) \quad E_n^{\theta,\alpha} = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \theta_\nu \left[ \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \right]^2 + \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} \right) \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) \right].$$

**Remarque 1.4.11.** L'égalité suivante a lieu :

$$(1.4.56) \quad \begin{aligned} E_n^{\theta,\alpha} &= \frac{1}{2} (K_h \mathbf{U}_h^{n+1}, \mathbf{U}_h^n) + \frac{1}{2} \left( (I - \theta_\nu K) \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{U}_h^{n+1}, \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} \right), \left( \mathbf{U}_h^n, \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} \right) \right)_0 = \frac{1}{2} \left\| \left( \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathbf{U}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} \right) \right\|_1^2. \end{aligned}$$

■

La proposition suivante indique que l'énergie discrète (1.4.53) est conservée :

**Proposition 1.4.12.** L'énergie  $E_n^{\theta,\alpha}$  est constante en temps :

$$(1.4.57) \quad E_n^{\theta,\alpha} = E_0^{\theta,\alpha}, \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad \forall \theta, \alpha \geq 0.$$

■

*Preuve.* On multiplie la première équation de (1.4.54) par  $(\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^{n-1})$  et on utilise la symétrie de  $K$  et  $M_0^{\theta,\nu}$  pour écrire que

$$(1.4.58) \quad \begin{aligned} &(M_0^{\theta,\nu} (\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n), (\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n)) + \nu^2 (K \mathbf{U}_h^{n+1}, \mathbf{U}_h^n) \\ &= (M_0^{\theta,\nu} (\mathbf{U}_h^n - \mathbf{U}_h^{n-1}), (\mathbf{U}_h^n - \mathbf{U}_h^{n-1})) + \nu^2 (K \mathbf{U}_h^n, \mathbf{U}_h^{n-1}). \end{aligned}$$

L'égalité de (1.4.56) conduit alors à  $E_n^{\theta,\alpha} = E_{n-1}^{\theta,\alpha}$ ,  $\forall n = 1, \dots, N$  puis au résultat.

De façon similaire, on obtient la propriété suivante :

**Lemme 1.4.13.** Pour tout  $\alpha, \theta > 0$ ,

$$(1.4.59) \quad E_n^{\theta,\alpha} \geq \frac{1}{4h} \min \left( 1, \frac{1 - 4\theta_\nu}{\nu^2} \right) \sum_{j=0}^J \left[ (u_j^{n+1} - u_{j+1}^n)^2 + (u_{j+1}^{n+1} - u_j^n)^2 \right].$$

■

qui implique

**Proposition 1.4.14.** *Pour tout  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{S}$ , l'énergie satisfait :*

$$(1.4.60) \quad E_n^{\theta, \alpha} = 0 \iff (u_j^n)_j = 0.$$

■

**Proposition 1.4.15 (Stabilité).** *Le schéma  $(\mathcal{A}_{h, \Delta t}^{\theta, \alpha})$  est stable si et seulement si  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{S}$ .*

■

*Preuve.* Le schéma  $(\mathcal{A}_{h, \Delta t}^{\theta, \alpha})$  est stable si  $E_0^{\theta, \alpha}$  est une forme quadratique positive, i.e. si la matrice  $M_1^{\theta, \alpha}$  est définie positive (on rappelle que  $K_h$  est définie positive). Les valeurs propres  $0 < \lambda_1^K < \lambda_2^K < \dots < \lambda_J^K$  de  $K$  sont données par  $\lambda_j^K = 4 \sin^2(j\pi h/2)$ . Cela implique que les valeurs propres de  $M_1^{\theta, \alpha} = I - (\theta, \nu + \nu^2/4)K$  sont

$$(1.4.61) \quad \lambda_j^{M_1^{\theta, \alpha}} = 1 - 4\left(\theta, \nu + \frac{\nu^2}{4}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right), \quad 1 \leq j \leq J.$$

La matrice est définie positive si  $\max_{1 \leq j \leq J} \lambda_j^{M_1^{\theta, \alpha}} > 0$  soit  $\max_{1 \leq j \leq J} \sin^2(j\pi h/2)(\nu^2(1 - 4\alpha) + 4\theta) < 1$  et finalement  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{S}$ , en utilisant que  $J = 1/h - 1$ .

**Proposition 1.4.16 (Consistance).** *Pour tout  $\theta, \alpha \geq 0$ , l'erreur de consistance liée à  $(\mathcal{A}_{h, \Delta t}^{\theta, \alpha})$  est de l'ordre de  $(\theta - 1/12)O(h^2) + (\alpha - 1/12)O(\Delta t^2) + O(h^4) + O(\Delta t^4) + O(h^2\Delta t^2)$ .*

■

**Remarque 1.4.17.** Il résulte que pour  $\nu = \sqrt{(1 - 12\theta)/(1 - 12\alpha)}$ , le schéma est d'ordre 4 en temps et en espace. Cependant, dans ce cas,  $(\theta, \alpha, \nu) \notin \mathcal{C}$ .

■

La consistance et la stabilité du schéma  $(\mathcal{A}_{h, \Delta t}^{\theta, \alpha})$  impliquent la convergence de la séquence  $(\mathbf{U}_h)_{h, \Delta t}$  vers  $u$  - solution de l'équation continue - lorsque  $h, \Delta t$  tendent vers zéro. On arrive alors au résultat essentiel suivant :

**Théorème 1.4.18.** *Soient  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{C}$  et  $T > 2 \max(1, \nu^2)$ . Il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  indépendantes de  $h$  et  $\Delta t$  telles que :*

$$(1.4.62) \quad C_1 E_0^{\theta, \alpha} \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left( \left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 + \theta, \nu \left| \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{\Delta t} \right|^2 \right) \leq C_2 E_0^{\theta, \alpha}.$$

■

La partie gauche de (1.4.62) est une inégalité d'observabilité uniforme, version discrète de

$$(1.4.63) \quad E(0) \leq C \int_0^T [(u_x(1, t))^2 + p\theta, \nu (u'_x(1, t))^2] dt$$

avec  $p = h^2$ , similaire à (1.2.8). Il est possible de montrer ces inégalités en utilisant la technique des multiplicateurs (voir par exemple [Kom94] dans le cas continu et [22] dans le cas discret). Plus simplement, on utilise ici l'analyse de Fourier et on suppose que la solution  $\mathbf{U}_h^n$  prend la forme

$$(1.4.64) \quad \mathbf{U}_h^n = \sum_{k=1}^J \left[ a_{k,h} \cos(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta, \alpha}} n \Delta t) + \frac{b_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta, \alpha}}} \sin(\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta, \alpha}} n \Delta t) \right] \phi_{k,h},$$

soit

$$(1.4.65) \quad \mathbf{U}_h^n = \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{k,h} e^{i\mu_{k,h} n \Delta t} \phi_{k,h},$$

avec

$$(1.4.66) \quad \mu_{-k,h} = -\mu_{k,h}; \mu_{k,h} = \sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta, \alpha}}; c_{k,h} = \frac{a_{k,h} - ib_{k,h}/\mu_{k,h}}{2}; c_{-k,h} = \overline{c_{k,h}}.$$

La démonstration se fait en deux étapes : on démontre tout d'abord le résultat suivant :

**Proposition 1.4.19.** Soit  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ . Pour tout  $T > 2 \max(1, \nu^2)$ , il existe deux constantes  $c, C > 0$  indépendantes de  $\Delta t$  et  $h$  telle que

$$(1.4.67) \quad \begin{aligned} c(T) \min(1, \nu^{-2}) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi h)}{h} \right|^2 &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left( \left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 + \theta_\nu \left| \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{\Delta t} \right|^2 \right) \\ &\leq C(T) \max(1, \nu^{-2}) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi h)}{h} \right|^2. \end{aligned}$$

■

On utilise pour cela une version discrète de l'inégalité d'Ingham (voir [Ing36] et pour une synthèse récente [KL04]) prouvée dans [NZ04b].

**Théorème 1.4.20** (Inégalité d'Ingham discrète). Soient  $\Delta t > 0$  et  $\{\mu_k\}$  une suite réelle satisfaisant, pour un certain  $\gamma$  et  $0 \leq p < 1/2$ , les conditions :

$$(1.4.68) \quad \begin{aligned} \mu_{k+1} - \mu_k &\geq \gamma > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ |\mu_k - \mu_l| &\leq \frac{2\pi - (\Delta t)^p}{\Delta t}, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Alors, pour chaque  $T > 2\pi/\gamma$ , il existe deux constantes positives  $C_1(T, \gamma)$  et  $C_2(T, \gamma)$  telles que

$$(1.4.69) \quad C_1(T, \gamma) \sum_{k=-J}^J |c_k|^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-J}^J \left| c_k e^{in\Delta t \mu_k} \right|^2 \leq C_2(T, \gamma) \sum_{k=-J}^J |c_k|^2$$

pour toute suite complexe  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ .

■

Si  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ , alors les conditions (1.4.68) sont satisfaites :

**Lemme 1.4.21.** Soit  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ . Alors,

$$(1.4.70) \quad \begin{aligned} \sqrt{\lambda_{j,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{j-1,h}^{\theta,\alpha}} &\geq \pi \min(1, \nu^{-2}) \quad \forall j = 2, \dots, J; \\ \left| \sqrt{\lambda_{j,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} \right| &\leq 2\pi \Delta t^{-1} + O(1) \quad \forall j, k = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

■

*Preuve.* La première inégalité est une conséquence de la relation suivante : pour  $(\theta, \alpha, \nu) \in C_2$ ,

$$(1.4.71) \quad \begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{k-1,h}^{\theta,\alpha}} &= \pi + O(h^2), \quad \forall k \ll J, \\ \bullet \quad \sqrt{\lambda_{\beta J,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{\beta J-1,h}^{\theta,\alpha}} &= \pi \frac{1 - 4\alpha}{1 - 4\theta + 4(\theta - \alpha) \cos^2(\frac{\beta\pi}{2})} + O(h^2), \quad \forall 0 \leq \beta \leq 1. \end{aligned}$$

La seconde, moins restrictive, est une conséquence de

$$(1.4.72) \quad \begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{l,h}^{\theta,\alpha}} &= (k - l)\pi + O(h^2), \quad \forall k, l \ll J, \\ \bullet \quad \sqrt{\lambda_{\beta_1 J,h}^{\theta,\alpha}} - \sqrt{\lambda_{\beta_2 J,h}^{\theta,\alpha}} &= 2 \frac{\sqrt{1 - 4\alpha}}{\sqrt{1 - 4\theta}} \left( f(\beta_1) - f(\beta_2) \right) h^{-1} + O(1), \quad \forall 0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1 \\ &= 2 \left( f(\beta_1) - f(\beta_2) \right) \Delta t^{-1} + O(1), \end{aligned}$$

avec

$$(1.4.73) \quad f(\beta) = \arcsin \left( \frac{\sqrt{1 - 4\theta} \sin(\frac{\beta\pi}{2})}{\sqrt{1 - 4\theta + 4(\theta - \alpha) \cos^2(\frac{\beta\pi}{2})}} \right)$$



utilisant  $|\arcsin(x)| \leq \pi/2, \forall x \in [0, 1]$ .

Grace à ce lemme, on peut maintenant montrer la proposition 1.4.19.

*Preuve de la Proposition 1.4.19.* Il résulte de (1.4.65) que

$$(1.4.74) \quad \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{k,h} e^{i\mu_{k,h} n \Delta t} \frac{\sin(k\pi Jh)}{h} \right|^2.$$

Puis, selon le lemme 1.4.21, on peut appliquer le théorème 1.4.20 avec  $p = 0$  et  $T > 2 \max(1, \nu^2)$  pour obtenir l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\Delta t$  et donc de  $h$  telles que

$$(1.4.75) \quad C_1(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi Jh)}{h} \right|^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 \leq C_2(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi Jh)}{h} \right|^2.$$

On calcule alors que

$$(1.4.76) \quad \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{\Delta t} = \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} \tilde{c}_{k,h} e^{i\mu_{k,h} n \Delta t} \sin(k\pi Jh), \quad \tilde{c}_{k,h} = c_{k,h} \frac{e^{i\mu_{k,h} \Delta t} - 1}{\Delta t}.$$

Appliquant à nouveau le Théorème 1.4.20, il existe deux constantes  $C_3$  et  $C_4$  telles que :

$$(1.4.77) \quad C_3(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |\tilde{c}_{k,h}|^2 \left| \sin(k\pi Jh) \right|^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{\Delta t} \right|^2 \leq C_4(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |\tilde{c}_{k,h}|^2 \left| \sin(k\pi Jh) \right|^2.$$

Finalement, de (1.4.75) et (1.4.77), il existe deux constantes telles que

$$(1.4.78) \quad c(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} (|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) \left| \frac{\sin(k\pi Jh)}{h} \right|^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left( \left| \frac{u_J^n}{h} \right|^2 + \theta_\nu \left| \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{\Delta t} \right|^2 \right) \leq C(T) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} (|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) \left| \frac{\sin(k\pi Jh)}{h} \right|^2.$$

Il reste à montrer que

$$(1.4.79) \quad \min(1, \nu^{-2}) |c_{k,h}|^2 \leq (|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) \leq \max(1, \nu^{-2}) |c_{k,h}|^2.$$

On écrit  $(|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) = |c_{k,h}|^2 (1 + \theta_\nu \nu^{-2} |e^{i\mu_{k,h} \Delta t} - 1|^2)$ . Dans le cas  $\theta_\nu > 0$ , utilisant  $|e^{i\mu_{k,h} \Delta t} - 1|^2 \leq 4$ , on obtient

$$(1.4.80) \quad |c_{k,h}|^2 \leq (|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) \leq |c_{k,h}|^2 (1 + 4\theta_\nu \nu^{-2})$$

tandis que dans le cas  $\theta_\nu < 0$ , on obtient

$$(1.4.81) \quad |c_{k,h}|^2 (1 + 4\theta_\nu \nu^{-2}) \leq (|c_{k,h}|^2 + \theta_\nu h^2 |\tilde{c}_{k,h}|^2) \leq |c_{k,h}|^2.$$

Puis, pour  $(\theta, \alpha, \nu) \in C_1$ , on a  $(1 + 4\theta_\nu \nu^{-2}) = (1 + (1 - \nu^2) \nu^{-2}) = \nu^{-2} > 0$  tandis que pour  $(\theta, \alpha, \nu) \in C_2$ , on a  $(1 + 4\theta_\nu \nu^{-2}) = 1 + 4 \frac{\theta - \alpha}{1 - 4\alpha} \frac{1 - 4\alpha}{1 - 4\theta} = \frac{1 - 4\alpha}{1 - 4\theta} = \nu^{-2}$  menant à (1.4.79). Finalement, de (1.4.78) et (1.4.79), nous obtenons le résultat en notant que  $\sin(k\pi Jh) = -\sin(k\pi h)$ .

La seconde étape consiste à évaluer l'énergie  $E_0^{\theta, \alpha}$ .

**Proposition 1.4.22.** Soit  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ . On a les inégalités suivantes :

$$(1.4.82) \quad \min(1, \nu^{-2}) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi h)}{h} \right|^2 \leq 2E_0^{\theta, \alpha} \leq \max(1, \nu^{-2}) \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} |c_{k,h}|^2 \left| \frac{\sin(k\pi h)}{h} \right|^2.$$

■

*Preuve.* Selon (1.4.56), on a

$$(1.4.83) \quad E_0^{\theta, \alpha} = \frac{1}{8h^2} \left( K(\mathbf{U}_h^1 + \mathbf{U}_h^0), \mathbf{U}_h^1 + \mathbf{U}_h^0 \right) + \frac{1}{2\Delta t^2} \left( M_1^{\theta, \nu}(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^0), \mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^0 \right).$$

Utilisant alors

$$(1.4.84) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_h^1 + \mathbf{U}_h^0 &= \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{k,h} (e^{i\mu_k \Delta t} + 1) \boldsymbol{\phi}_{k,h} \equiv \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{1k} \boldsymbol{\phi}_{k,h}, \\ \mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^0 &= \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{k,h} (e^{i\mu_k \Delta t} - 1) \boldsymbol{\phi}_{k,h} \equiv \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} c_{2k} \boldsymbol{\phi}_{k,h}, \end{aligned}$$

on obtient

$$(1.4.85) \quad E_0^{\theta, \alpha} = \frac{1}{8h^2} \sum_{|k|, |q| \leq J, k \neq 0, q \neq 0} c_{1k} c_{1q} (K \boldsymbol{\phi}_{k,h}, \boldsymbol{\phi}_{q,h}) + \frac{1}{2\Delta t^2} \sum_{|k|, |q| \leq J, k \neq 0, q \neq 0} c_{2k} c_{2q} (M_1^{\theta, \nu} \boldsymbol{\phi}_{k,h}, \boldsymbol{\phi}_{q,h}).$$

De plus, les valeurs propres de la matrice  $K$  sont  $\lambda_k^K = 4 \sin^2(k\pi h/2)$ ,  $k = 1, \dots, J$ , associées à  $\boldsymbol{\phi}_h^k$ . La relation  $M_1^{\theta, \nu} = M_0^{\theta, \nu} - \nu^2/4K = I - (\theta, \nu + \nu^2/4)K = I - K/4$  implique que

$$(1.4.86) \quad E_0^{\theta, \alpha} = \frac{1}{8h^2} \sum_{|k|, |q| \leq J, k \neq 0, q \neq 0} c_{1k} c_{1q} \lambda_k^K (\boldsymbol{\phi}_{k,h}, \boldsymbol{\phi}_{q,h}) + \frac{1}{2\Delta t^2} \sum_{|k|, |q| \leq J, k \neq 0, q \neq 0} c_{2k} c_{2q} \left( 1 - \frac{\lambda_k^K}{4} \right) (\boldsymbol{\phi}_{k,h}, \boldsymbol{\phi}_{q,h}).$$

Puis, utilisant

$$(1.4.87) \quad (\boldsymbol{\phi}_{k,h}, \boldsymbol{\phi}_{q,h}) = \frac{J+1}{2} \delta_{kq} = \frac{1}{2h} \delta_{kq},$$

on obtient que

$$(1.4.88) \quad E_0^{\theta, \alpha} = \frac{1}{4h^2} \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} \left( |c_{1k}|^2 \sin^2(k\pi h/2) + \frac{1}{\nu^2} |c_{2k}|^2 \cos^2(k\pi h/2) \right).$$

On écrit  $|c_{2k}|^2 = 2|c_{k,h}|^2(1 - \cos(\mu_{k,h}\Delta t))$ ,  $|c_{1k}|^2 = 2|c_{k,h}|^2(1 + \cos(\mu_{k,h}\Delta t))$  puis  $\cos(\mu_{k,h}\Delta t) = 1 - 2 \sin^2(\mu_{k,h} \frac{\Delta t}{2})$  pour obtenir que

$$(1.4.89) \quad \cos(\mu_{k,h}\Delta t) = 1 - 2 \frac{\nu^2 \sin^2(k\pi h/2)}{1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2)}.$$

Cela conduit à

$$(1.4.90) \quad 1 + \cos(\mu_{k,h}\Delta t) = \frac{2 \cos^2(k\pi h/2)}{1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2)}, \quad 1 - \cos(\mu_{k,h}\Delta t) = \frac{2\nu^2 \sin^2(k\pi h/2)}{1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2)},$$

et finalement à

$$(1.4.91) \quad E_0^{\theta, \alpha} = 2 \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} \frac{|c_{k,h}|^2 \sin^2(k\pi h/2) \cos^2(k\pi h/2)}{h^2 (1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2))} = \frac{1}{2} \sum_{|k| \leq J, k \neq 0} \frac{|c_{k,h}|^2 \sin^2(k\pi h/2)}{h^2 (1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2))}.$$

Utilisant le fait que  $1 + 4\theta, \nu^{-2} = \nu^{-2}$ , on montre que

$$(1.4.92) \quad \min(1, \nu^2) \leq 1 - 4\theta, \nu \sin^2(k\pi h/2) \leq \max(1, \nu^2)$$

(rappelons que  $\nu = 1$  implique  $\theta, \nu = 0$  quand  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ ) conduisant au résultat.

En vertu du théorème 1.4.20, l'écart uniforme entre deux valeurs propres consécutives est une propriété suffisante (en fait nécessaire également) conduisant à l'observabilité uniforme par rapport à  $h$  et  $\Delta t$ . Dans le cas continu, cet écart est constant égal à  $\pi$ . La figure 1.3 donne l'évolution de  $\sqrt{\lambda_k^{\theta, \alpha}}$  pour quelques valeurs de  $\theta, \alpha$  et  $\nu$ , en fonction de  $k$ .

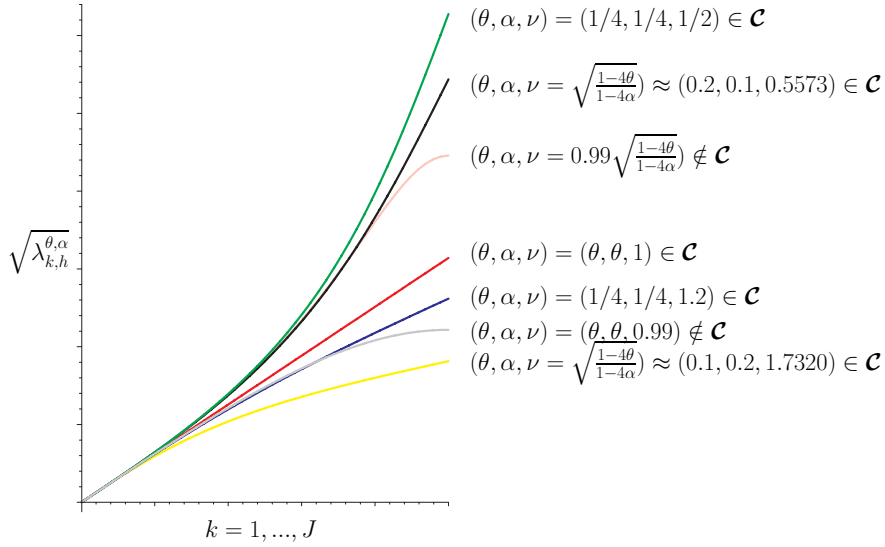


FIG. 1.3: Evolution de  $\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}$ ,  $k = 1, \dots, J$  pour différentes valeurs de  $\theta, \alpha$  et  $\nu$ .

**Remarque 1.4.23.** Si on suppose que  $\nu$  peut ne pas être d'ordre 1, on peut enrichir l'ensemble des paramètres  $\mathcal{C}$  par le sous-ensemble suivant :

$$(1.4.93) \quad \mathcal{C}_3 = \left\{ (\theta, \alpha, \nu_h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \nu_h = \frac{\tan(\pi h/2)}{\sqrt{1-4\alpha}}, \alpha < 1/4, \theta = 1/4 \right\}.$$

Des résultats similaires de contrôlabilité sont obtenus avec  $(\theta, \alpha, \nu_h) \in \mathcal{C}_3$  pour  $T > 2 \max(1, \nu_h^2) = 2$ . En particulier, le spectre satisfait une propriété d'écart uniforme. D'un point de vue pratique, l'inconvénient est que  $\Delta t$  est alors de l'ordre de  $h^2$ . Enfin, si  $\theta$  peut dépendre de  $h$ , les deux sous-ensembles suivants :

$$(1.4.94) \quad \mathcal{C}_4 = \left\{ (\theta_h, \alpha, \nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \theta_h = (2 \cos(\pi h/2))^{-2}, \alpha = 1/4 \right\}$$

et

$$(1.4.95) \quad \mathcal{C}_5 = \left\{ (\theta_h, \alpha, \nu_h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, \nu_h = \sqrt{\frac{\cos(\pi h/2)^{-2} - 4\theta_h}{1-4\alpha}}, (\cos(\pi h/2)^{-2} - 4\theta_h)(1-4\alpha) > 0 \right\}$$

assurent un écart uniforme. Les résultats numériques obtenus avec  $\mathcal{C}_4$  (resp.  $\mathcal{C}_5$ ) sont très proches de ceux obtenus avec  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ). ■

Les démonstrations techniques des théorèmes annoncés, en particulier la convergence de la suite de contrôles, sont détaillées dans [15]. Avant de donner des résultats numériques, il est intéressant de remarquer que la quantité  $\theta_\nu = 1/4(1 - \nu^2)$  est, pour les paramètres  $(\alpha, \theta, \nu)$  de l'ensemble  $\mathcal{C}$ , **constante égale** à

$$(1.4.96) \quad \theta_\nu = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\Delta t^2}{h^2} \right).$$

Cette **invariance inattendue** conduit au schéma uniformément contrôlable annoncé au début de cette section sous la condition de contrôlabilité/stabilité  $\Delta t < \sqrt{\frac{T}{2}}h$ .

### Expériences numériques

La méthode HUM ramène la détermination du contrôle à la minimisation de la fonctionnelle  $J_h$  continue, strictement convexe et coercive. On utilise alors la méthode itérative du gradient conjugué sur l'opérateur

HUM, conduisant aux données initiales  $(\hat{w}_{0h}, \hat{w}_{1h})$  du problème adjoint

$$(1.4.97) \quad (\hat{w}_{0h}, \hat{w}_{1h}) = (\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})^{-1}(y_{1h}, -y_{0h}),$$

puis au contrôle du système discret. Le comportement en fonction de  $h$  et  $\Delta t$  du conditionnement numérique de cet opérateur illustre le caractère mal posé du problème : la figure 1.4 représente l'évolution de  $\log(\text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}))$  en fonction de  $1/h$  pour  $\theta = \alpha = 0$  et plusieurs valeurs de  $\nu = \Delta t/h \leq 1$ , telles que  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{S}$ . Pour  $\nu < 1$  i.e.  $(\theta, \alpha, \nu) \notin \mathcal{C}$ , il apparaît que  $\text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$  croît exponentiellement avec  $1/h$  :

$$(1.4.98) \quad \text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) \approx C_\nu e^{\beta_\nu/h} \quad \text{pour } \nu < 1$$

avec  $C_\nu, \beta_\nu > 0$ . Lorsque  $\nu = 1$  et  $\theta = \alpha \geq 0$  (et ainsi  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{C}$ ), le comportement est polynômial (voir

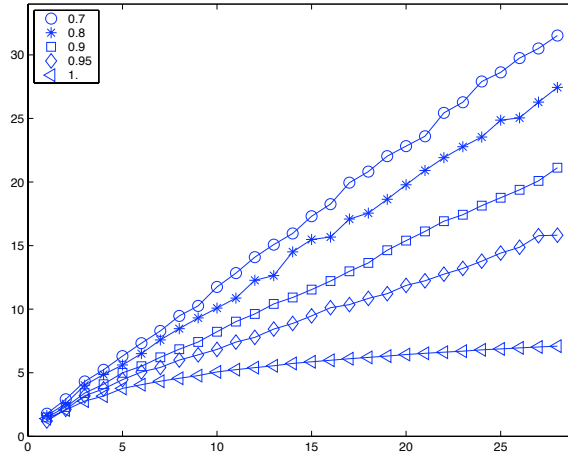


FIG. 1.4:  $\log(\text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}))$  vs.  $1/h$  pour des valeurs de  $\nu = \Delta t/h \leq 1$  et  $\theta = \alpha = 0$ .  $T = 2.4 (> 2 \max(1, \nu^2))$ .

Figure 1.5) :

$$(1.4.99) \quad \text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) \approx e^{-0.1716} h^{-2.15} \quad \text{pour } \nu = 1$$

(qui est le comportement usuel en théorie des éléments finis dans le cas *bien posé*). De façon attendue, ce comportement polynômial est obtenu également lorsque  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{C}$  (voir figure 1.5). L'évolution du conditionnement de  $\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}$  associé à l'opérateur  $\Lambda$  indique clairement que l'approximation numérique du contrôle est un problème mal posé lorsque les schémas standards sont employés. Le caractère exponentiel du conditionnement de l'opérateur peut alors, selon la régularité des données initiales, générer un contrôle divergeant lorsque  $h$  tend vers zéro. A l'inverse, l'usage de schémas modifiés permet une approximation convergente du contrôle (indépendamment de la régularité des données).

A titre d'exemple, considérons maintenant sur l'intervalle  $(0, 1)$  la donnée initiale suivante :

$$(1.4.100) \quad y_0(x) = \begin{cases} 16x & x \in [0, 1/2], \\ 0 & x \in ]1/2, 1]. \end{cases} \quad ; \quad y_1(x) = 0$$

et prenons  $T = 2.4$ . Le contrôle associé à (1.4.20) de norme  $L^2$ - minimale est :

$$(1.4.101) \quad v(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 0.9] \cup [1.9, T], \\ 8(t - 1.4) & t \in ]0.9, 1.9[, \end{cases}$$

soit  $\|v\|_{L^2(0,T)} = 4/\sqrt{3} \approx 2.3094$ . Les données initiales correspondantes pour le problème adjoint sont

$$(1.4.102) \quad \hat{w}_0(x) = 0 \quad ; \quad \hat{w}_1(x) = \begin{cases} -8x & x \in [0, 1/2[, \\ 0 & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

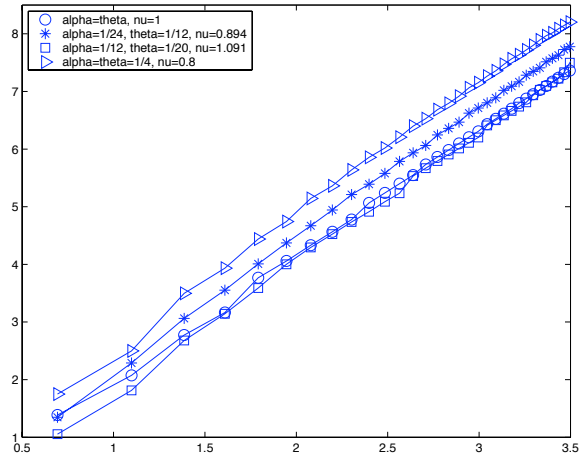


FIG. 1.5:  $\log(\text{cond}(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}))$  vs.  $\log(1/h)$ .  $T = 2.4 (> 2 \max(1, \nu^2))$ ,  $(\theta, \alpha, \nu) \in C$ .

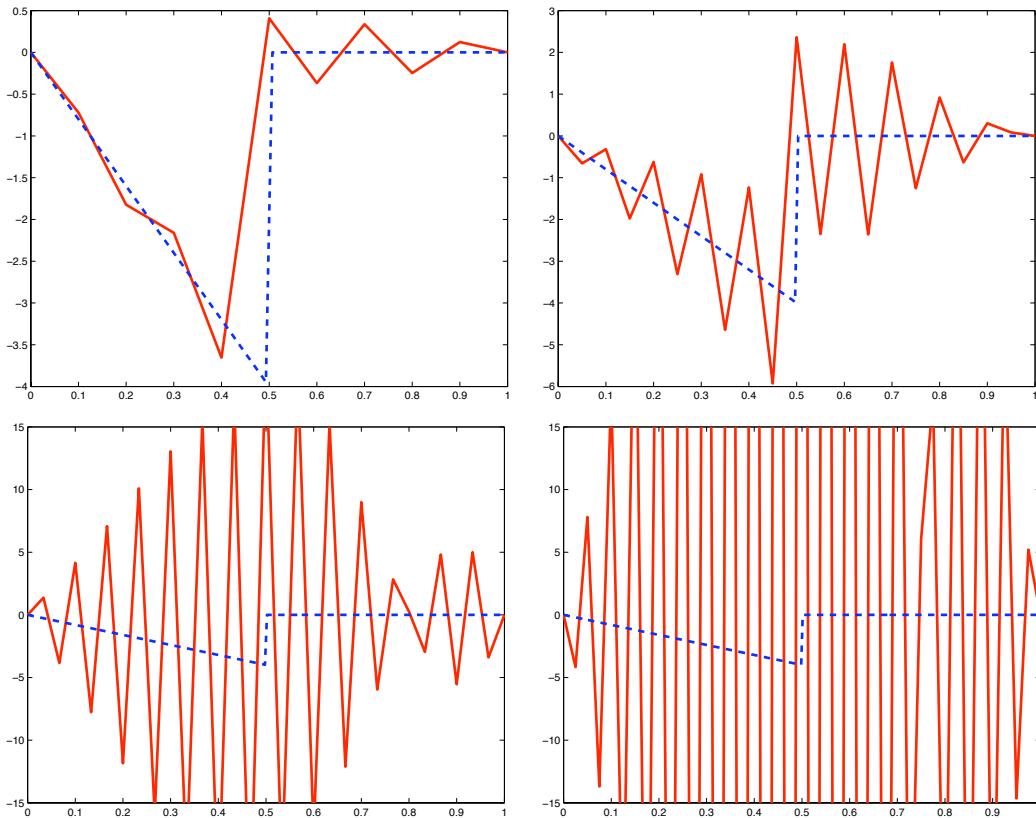


FIG. 1.6: (FDS)  $P(\hat{w}_{1h})(x)$  vs.  $x \in [0, 1]$ ,  $\nu = 0.98, T = 2.4$  and  $h = 1/10$  (haut à gauche),  $h = 1/20$  (haut à droite),  $h = 1/30$  (bas à gauche),  $h = 1/40$  (bas à droite).

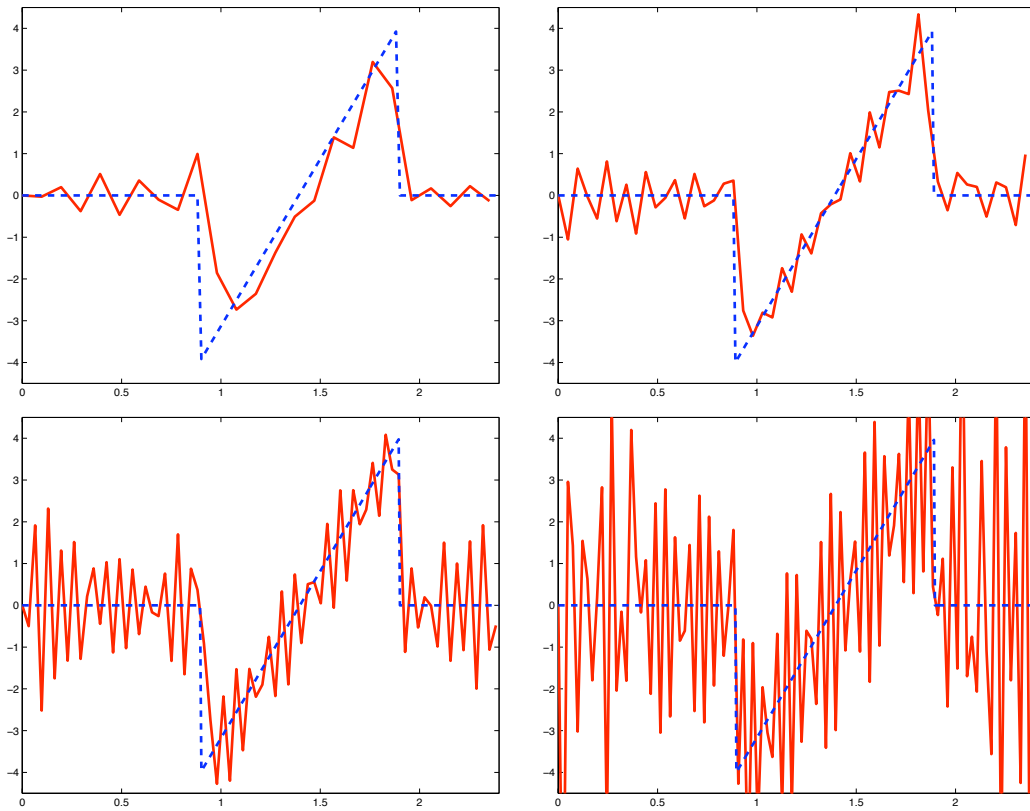


FIG. 1.7: (FDS) : Contrôle  $P(\mathbf{v}_h)(t)$  vs.  $t \in [0, T]$ ,  $\nu = 0.98$ ,  $T = 2.4$  et  $h = 1/10$  (haut à gauche),  $h = 1/20$  (haut à droite)  $h = 1/30$  (bas à gauche),  $h = 1/40$  (bas à droite).

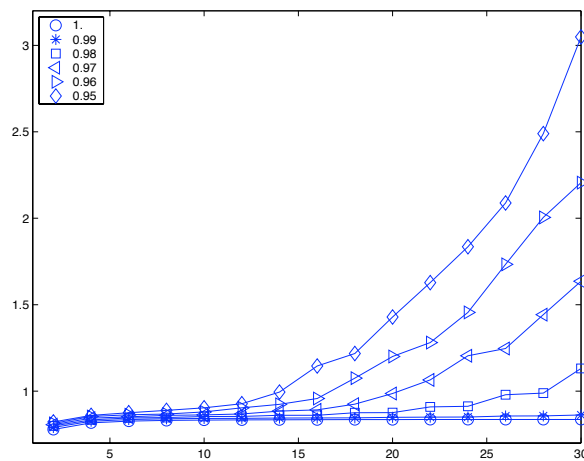


FIG. 1.8: (FDS)  $\log(\|Q(\mathbf{v}_h)\|_{L^2(0,T)})$  vs.  $1/h$  pour différentes valeurs de  $\nu$  et  $T = 2.4$ .

La figure 1.9-gauche représente l'erreur relative sur le résidu du gradient conjugué pour trois valeurs de  $h$  et illustre la divergence lorsque  $h$  est suffisamment petit. En revanche, le schéma  $(S_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha})$  (MFS) avec  $(\theta, \alpha, \nu) \in \mathcal{C}$  produit une erreur relative décroissante et une rapide convergence (voir Figure 1.9-droite). Remarquons cependant que le comportement du schéma usuel indique que ce dernier est apte à résoudre le problème de la contrôlabilité approchée qui consiste à conduire la solution à l'instant  $T$  telle que

$$(1.4.103) \quad \|y(T, \cdot)\|_{L^2(0,1)} + \|y'(T, \cdot)\|_{H^{-1}(0,1)} \leq \epsilon$$

avec  $\epsilon$  fixé indépendant de  $h$  et de  $\Delta t$ . Dans ce cas, le contrôle approché est obtenu en minimisant la fonctionnelle

$$(1.4.104) \quad J_h^\epsilon(w_{0h}, w_{1h}) = J_h(w_{0h}, w_{1h}) + k(\epsilon)\|w_{0h}, w_{1h}\|_1^2,$$

dont la constante de coercivité  $-C(h, T) + k(\epsilon)$  est uniformément minorée par rapport à  $h$  et  $\Delta t$ . Le paramètre  $k(\epsilon)$  décroissant vers zéro avec  $\epsilon$  est à *ajuster* convenablement.

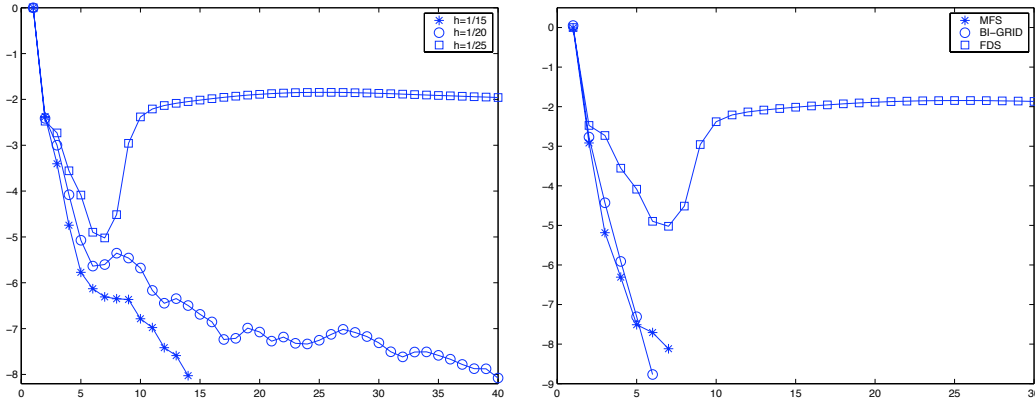


FIG. 1.9: Log10(erreur relative du résidu) vs. itération du gradient conjugué - gauche : (FDS) avec  $\nu = 0.99$  et  $h = 1/15, 1/20, 1/25$  - droite :  $h = 1/25$  (FDS) avec  $\nu = 0.99$ , (MFS) et Bi-Grille avec  $\nu = 0.8$ .

	$h=1/20$	$h=1/40$	$h=1/80$	$h=1/160$	$h=1/320$
# Itérations	9	5	4	4	4
$\ \hat{w}_{0h}\ _{L^2(0,1)}$	$8.46 \times 10^{-4}$	$1.49 \times 10^{-4}$	$2.63 \times 10^{-6}$	$7.04 \times 10^{-9}$	$4.35 \times 10^{-13}$
$\ \hat{w}_{0h}\ _{H^1(0,1)}$	$7.80 \times 10^{-3}$	$1.75 \times 10^{-3}$	$4.03 \times 10^{-5}$	$1.49 \times 10^{-7}$	$9.99 \times 10^{-12}$
$\frac{\ \hat{w}_1 - \hat{w}_{1h}\ _{L^2(0,1)}}{\ \hat{w}_1\ _{L^2(0,1)}}$	$6.19 \times 10^{-2}$	$4.42 \times 10^{-2}$	$3.14 \times 10^{-2}$	$2.23 \times 10^{-2}$	$1.58 \times 10^{-2}$
$\frac{\ y_0 - y_{0h}\ _{L^2(0,T)}}{\ y_0\ _{L^2(0,1)}}$	$1.71 \times 10^{-4}$	$3.95 \times 10^{-5}$	$4.07 \times 10^{-5}$	$2.69 \times 10^{-5}$	$1.92 \times 10^{-5}$
$\ y_{1h}\ _{H^{-1}(0,1)}$	$5.36 \times 10^{-4}$	$1.84 \times 10^{-4}$	$3.98 \times 10^{-5}$	$1.61 \times 10^{-7}$	$1.14 \times 10^{-11}$
$\frac{\ v_h - v\ _{L^2(0,T)}}{\ v\ _{L^2(0,T)}}$	$3.24 \times 10^{-1}$	$2.72 \times 10^{-1}$	$2.32 \times 10^{-1}$	$2.07 \times 10^{-1}$	$1.63 \times 10^{-1}$
$\ v_h\ _{L^2(0,T)}$	2.137	2.219	2.263	2.286	2.297
$\frac{\ y_h(T)\ _{L^2(0,1)}}{\ y_h(0)\ _{L^2(0,1)}}$	$5.80 \times 10^{-3}$	$1.41 \times 10^{-3}$	$5.37 \times 10^{-5}$	$2.07 \times 10^{-5}$	$1.44 \times 10^{-5}$

TAB. 1.1: (MFS) Résultats obtenus avec MFS pour  $(\theta, \alpha, \nu) \approx (1/20, 1/12, 1.0954)$ .

Enfin, je renvoie à [15] pour une étude comparée avec la méthode bi-grille, introduit dans [Glo91] (et analysée dans [NZ04a, IZ08, LM08]) et qui consiste à calculer la direction de descente à chaque itération

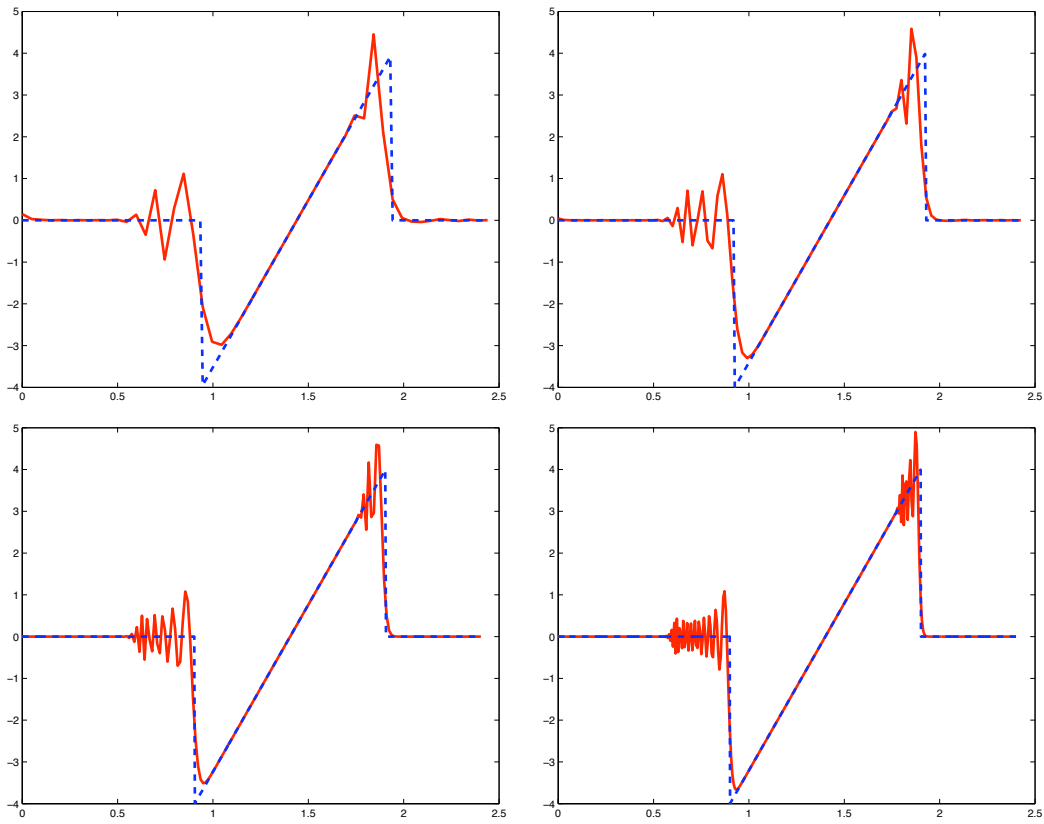


FIG. 1.10: (MFS) Contrôle  $P(v_h)(t)$  vs.  $t \in [0, T]$  -  $(\theta, \alpha, \nu) \approx (1/20, 1/12, 1.0954)$ ,  $T = 2.4$  et  $h = 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$ .



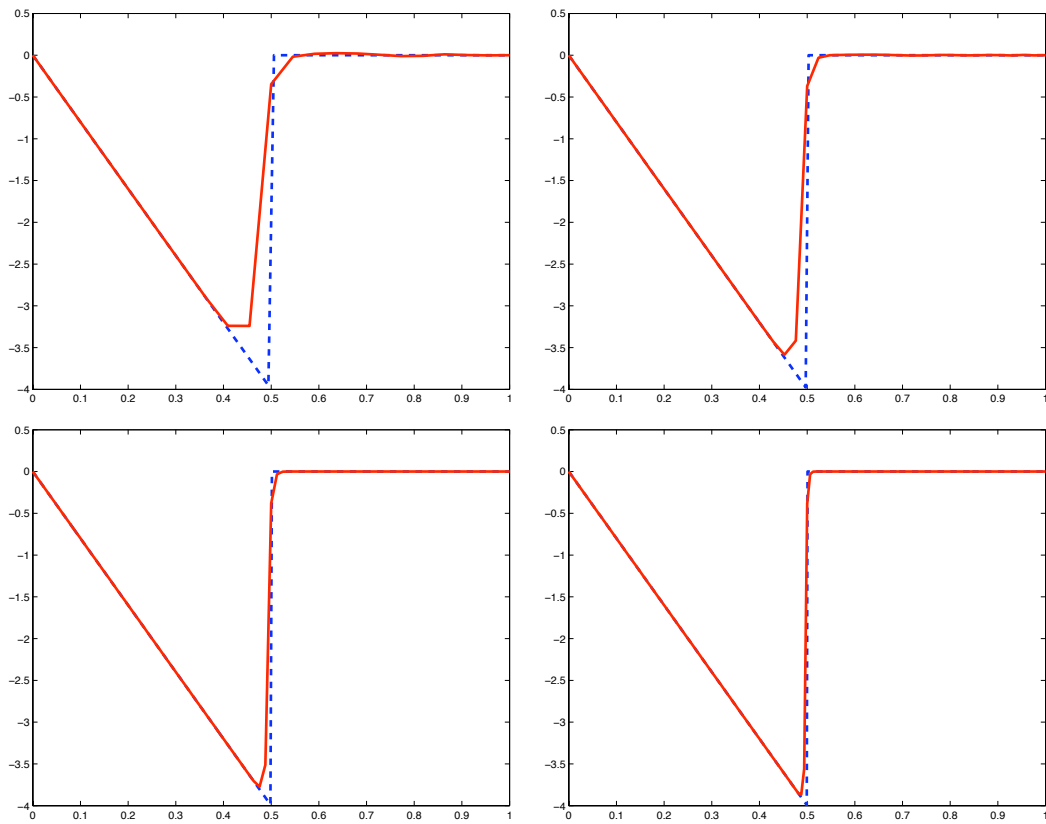


FIG. 1.11: (MFS)  $P(\hat{w}_{1h})(x)$  vs.  $x \in [0, 1]$  -  $(\theta, \alpha, \nu) \approx (1/20, 1/12, 1.0954)$ ,  $T = 2.4$  et  $h = 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$ .

du gradient conjugué à partir de la projection de la solution sur une grille grossière. Le contrôle obtenu avec cette méthode est associé à une régularisation des données initiales  $(y^0, y^1)$  : cela explique le fait que la méthode bi-grille, très efficace pour des données assez régulières (par exemple pour  $y^0 \in C^0(\bar{\Omega})/C^1(\bar{\Omega}), y^1 \in L^\infty(\Omega)/C^0(\bar{\Omega})$  du cas test de R. GLOWINSKI) ne conduit pas à zéro les données initiales irrégulières, par exemple dans le cas critique ici où  $y^0$  est discontinue (voir figure 1.12 et [15]).

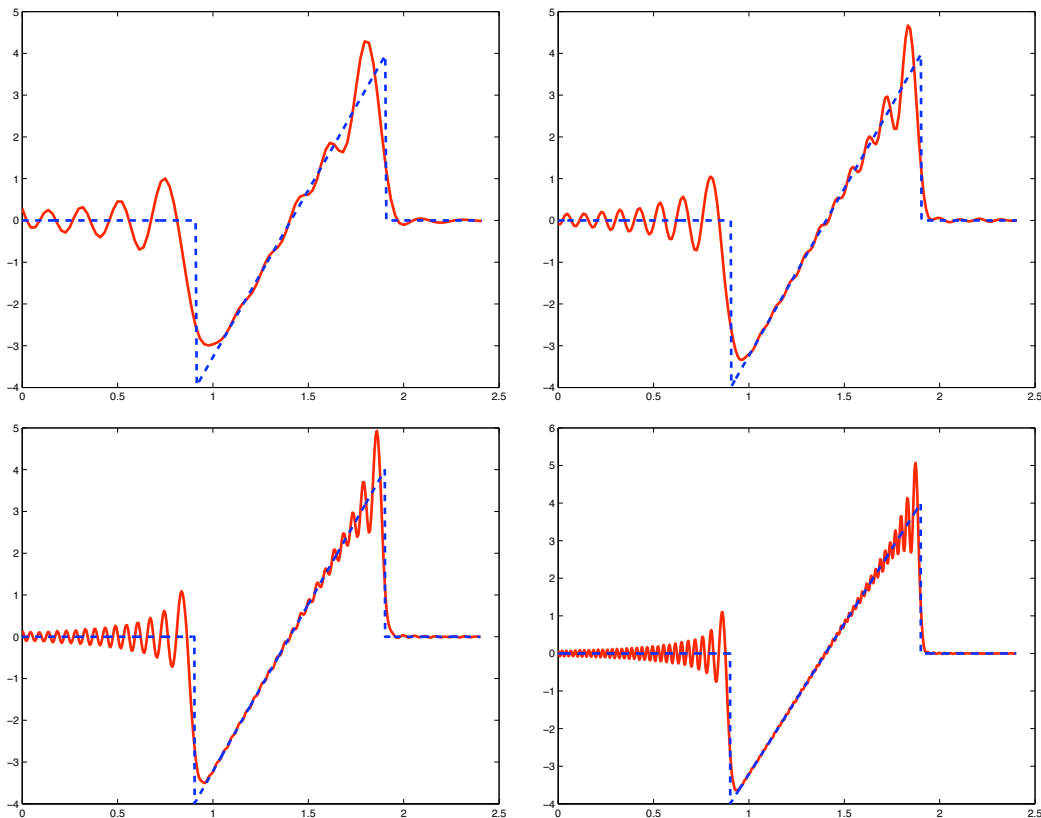


FIG. 1.12: (Bi-Grid) Contrôle  $P(v_h)(t)$  vs.  $t \in [0, T]$  obtenu avec la méthode bi-grille -  $\nu = 0.5$ ,  $T = 2.4$  et  $h = 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$ .

Parmi les rares et récents travaux dans ce cadre complètement discret, je mentionne la référence [EZZ08].

#### 1.4.2 Un schéma semi-discret en espace uniformément contrôlable pour l'équation des ondes 2-D- Contrôle frontière

La pathologie numérique présentée et étudiée dans le cas 1-D demeure naturellement dans le cas bi-dimensionnel, dont l'analyse est plus difficile. Commençons par le cas semi-discret en espace, suivant la référence [4] en collaboration avec CARLOS CASTRO<sup>1</sup> et SORIN MICU<sup>2</sup>. Le système considéré dans [4] avec

<sup>1</sup>Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, Espagne.

<sup>2</sup>Facultatea de Matematica-Informatica, Universitatea din Craiova, Roumanie.

$\Omega = (0, 1)^2$  est

$$(1.4.105) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{pour } (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(t, x, y) = 0 & \text{pour } (x, y) \in \Gamma_0, \quad t > 0, \\ u(t, 1, y) = v(t, y) & \text{pour } y \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(t, x, 1) = z(t, x) & \text{pour } x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, x, y) = u^0(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega, \\ u'(0, x, y) = u^1(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

où le support du contrôle  $(v, z)$  est défini par

$$(1.4.106) \quad \begin{cases} \Gamma_0 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}, \\ \Gamma_1 = \{(x, 1) : 0 < x < 1\} \cup \{(1, y) : 0 < y < 1\}. \end{cases}$$

Pour tout  $T$  suffisamment grand et  $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , on cherche le contrôle tel que

$$(1.4.107) \quad u(T, \cdot) = u'(T, \cdot) = 0.$$

La condition d'optique géométrique de la Définition 1.2.1 étant assurée par le choix de  $\Gamma_0, \Gamma_1$ , le temps minimal de contrôlabilité est  $T = 2\sqrt{2}$ . Si  $w$  désigne la solution du problème homogène associé, l'inégalité d'observabilité s'écrit ici

$$(1.4.108) \quad \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 + |w_t|^2) dx dy \leq C \left( \int_0^T \int_0^1 |w_x(t, 1, y)|^2 dy dt + \int_0^T \int_0^1 |w_y(t, x, 1)|^2 dx dt \right)$$

pour une certaine constante  $C$  positive et tout  $T > 2\sqrt{2}$ . Le schéma semi-discret aux différences finies associé à (1.4.105) n'est pas uniformément contrôlable (voir par exemple [Zua99]).

### Dérivation d'un schéma numérique uniformément contrôlable

On introduit la nouvelle variable  $\zeta(t, x, y) = w'(t, x, y)$  de telle façon que l'équation (1.2.4) prenne la forme variationnelle suivante :

$$(1.4.109) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } (w, \zeta) = (w, \zeta)(t, x, y) \text{ avec } (w(t), \zeta(t)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \forall t \in (0, T) \text{ et} \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 w(t, x, y) \psi(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \zeta(t, x, y) \psi(x, y) dx dy, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta(t, \cdot), \varphi \rangle_{-1,1} = \int_0^1 \int_0^1 \nabla w(t, x, y) \nabla \varphi(x, y) dx dy, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ w(T, x, y) = w^0(x, y), \quad \zeta(T, x, y) = w^1(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

On discrétise ensuite (1.4.109) en utilisant une méthode d'éléments finis mixtes (voir par exemple [RT89]). Soient  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $h = 1/(N+1)$  et les points  $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ ,  $0 \leq i, j \leq N+1$ . Soit  $\mathbb{Q}_1$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un par rapport à chacune des variables  $x, y$  et soit  $\mathbb{Q}_0$  l'espace des fonctions constantes. On introduit les fonctions de base de la façon suivante. Pour chaque  $1 \leq i, j \leq N$ , soit  $\mathcal{Q}_{ij}^h = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$  tels que  $\cup_{0 \leq i, j \leq N} \mathcal{Q}_{i,j}^h = \Omega = (0, 1)^2$  et on définit les fonctions

$$\begin{cases} \psi_{ij}|_{\mathcal{Q}_{ki}^h} \in \mathbb{Q}_0, & \psi_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{Q}_{ij}^h \cup \mathcal{Q}_{i-1,j}^h \cup \mathcal{Q}_{i,j-1}^h \cup \mathcal{Q}_{i-1,j-1}^h, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \varphi_{ij}|_{\mathcal{Q}_{ki}^h} \in \mathbb{Q}_1, & \varphi_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ij}^{kl}. \end{cases}$$

en notant  $\psi_{ij} = \psi(x_i, y_j)$ .



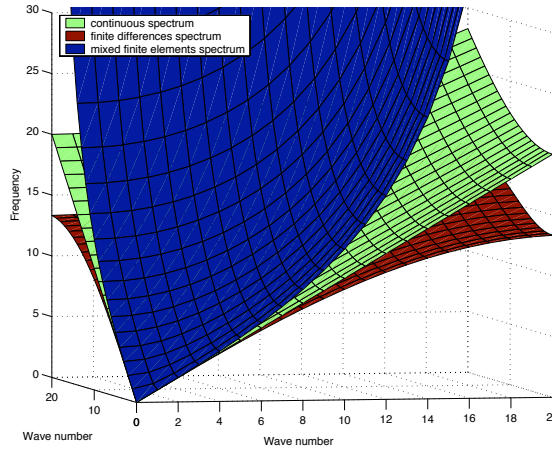


FIG. 1.13:  $\omega(\xi)$  avec  $\xi \in [0, \pi/h)^2$  et  $h = 1/21$  pour la semi-discrétisation éléments finis mixtes (surface supérieure), équation des ondes continues (surface médiane) et la semi-discrétisation différences finies usuelle (surface inférieure). On observe que la norme du gradient  $|\nabla_{\xi}\omega(\xi)|$  est constante égale à 1 dans le cas continu, supérieure à 1 dans le cas mixte et tend vers zéro dans le cas différences finies lorsque  $\xi$  approche  $(\pi/h, 0)$ .

De façon similaire, on peut introduire la vitesse des ondes pour le cas semi-discret (voir [Tre82]). Soit  $w_{ij} = e^{i(\xi \cdot (x_i, y_j) - \omega t)}$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (-\pi/h, \pi/h)^2$  une onde discrète plane qui se propage dans la direction  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  avec une vitesse de groupe  $\nabla_{\xi}\omega \cdot v$ . Dans le cas de la méthode mixte,

$$\omega = \omega_{mfe}(\xi) = \frac{2}{h} \sqrt{\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right) + \frac{2}{3} \tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)},$$

tandis pour le schéma aux différences finies usuel

$$\omega = \omega_{fd}(\xi) = \frac{2}{h} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)}.$$

Remarquons que  $\zeta_{mfe} = \min_{\xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2} |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}| = 1$  et  $\zeta_{fd} = \min_{\xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2} |\nabla_{\xi}\omega_{fd}| = O(h)$ . Cela est illustré sur la figure 1.13. Ainsi, le temps d'observabilité  $T$  peut être borné uniformément par rapport à  $h$ , uniquement dans le cas de la méthode mixte.

Dans ce qui suit, on prouve que cette propriété a lieu pour le système (1.4.112), en utilisant une approche différente de l'analyse spectrale. Remarquons au préalable que la référence récente [Meh08], obtenant une inégalité d'observabilité pour l'équation des ondes posée sur  $(0, 1)^2$  par une approche type Ingham, pourrait permettre de simplifier les développements qui suivent.

Puisque les matrices  $M_h$  et  $K_h$  sont définies positives, on peut définir le produit scalaire

$$(1.4.116) \quad \langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle_0 = \langle K_h f_1, g_1 \rangle + \langle M_h f_2, g_2 \rangle,$$

pour tout  $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^{2N^2}$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique usuel dans  $\mathbb{R}^{N^2}$ . La norme correspondante sera notée  $\|\cdot\|_0$ .

On montre que l'énergie discrète définie par

$$(1.4.117) \quad E_h(t) = \frac{1}{2} \|(W_h, W'_h)(t)\|_0^2$$

est constante le long des trajectoires :  $E_h(t) = E_h(0)$ , pour tout  $t > 0$ . Le résultat principal permettant d'obtenir la contrôlabilité uniforme est le suivant : il s'agit d'une version de l'inégalité (1.4.108), valide pour les solutions du système (1.4.112).

**Théorème 1.4.24.** *Pour tout  $T > 2\sqrt{3}$ , il existe une constante  $C(T) > 0$  indépendante de  $h$  telle que :*

$$(1.4.118) \quad E_h(0) \leq C(T) \frac{h}{2} \left\{ \int_0^T \left[ \frac{1}{h^2} \langle C_h W'_{N.}, W'_{N.} \rangle + \frac{1}{h^2} \langle C_h W'_{.N}, W'_{.N} \rangle \right] dt - \int_0^T \left[ \frac{1}{h^2} \langle B_h W_{N.}, W_{N.} \rangle + \frac{1}{h^2} \langle B_h W_{.N}, W_{.N} \rangle \right] dt \right\},$$

où  $W_{N.} = (w_{Nj})_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$  et  $W_{.N} = (w_{iN})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ . ■

**Remarque 1.4.25.** La méthode utilisée dans la preuve de l'inégalité d'observabilité (1.4.118) permet de conclure si et seulement si  $T > 2\sqrt{3}$ . Il est probable que cette estimation ne soit pas optimale et reste vraie pour  $T > 2\sqrt{2}$ , qui est la valeur du cas continu. ■

Pour la démonstration de ce résultat, basée sur les multiplicateurs discrets, nous renvoyons à [4].

### Construction du contrôle approché

On explicite alors une suite de contrôle  $(v_h, z_h)_{h>0}$  approchant le contrôle HUM  $(v, z)$  de (1.4.105). Pour cela, on minimise la fonctionnelle HUM du système adjoint discret (1.4.112).

Supposons que  $(U_h^0, U_h^1) = (u_j^0, u_j^1)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{2N^2}$  est une discrétisation des données initiales de (1.4.105) à contrôler. On définit la fonctionnelle  $J_h : \mathbb{R}^{2N^2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(1.4.119) \quad J_h(W_h^0, W_h^1) = - \langle (-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0), (W_h(0), W_h'(0)) \rangle_0 + \frac{1}{2h} \int_0^T [\langle C_h W'_{N.}, W'_{N.} \rangle + \langle C_h W'_{.N}, W'_{.N} \rangle] dt + \frac{1}{2h} \int_0^T [\langle B_h W_{N.}, W_{N.} \rangle + \langle B_h W_{.N}, W_{.N} \rangle] dt,$$

où  $(W_h, W_h')$  est la solution de (1.4.114) avec donnée  $(W_h^0, W_h^1) \in \mathbb{R}^{2N^2}$  et où on note  $W_{N.} = (w_{Nj})_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$  et  $W_{.N} = (w_{iN})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ .

**Théorème 1.4.26.** *Pour tout  $T > 2\sqrt{3}$ , la fonctionnelle  $J_h$  (1.4.119) possède un minimum unique  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)$ .* ■

*Preuve :* Puisque  $J_h$  est continue, convexe et définie sur un espace de dimension finie, le résultat est une conséquence de la coercivité de  $J_h$ , qui a lieu en vertu de (1.4.118). Précisément,

$$\begin{aligned} J_h(W_h^0, W_h^1) &\geq \frac{h}{32} \int_0^T \left( \sum_{j=0}^N |w'_{Nj+1}(t) + w'_{Nj}(t)|^2 + \sum_{i=0}^N |w'_{i+1N}(t) + w'_{iN}(t)|^2 \right) dt \\ &+ \frac{1}{6h} \int_0^T \left( \sum_{j=0}^N |w_{Nj+1}(t) + w_{Nj}(t)|^2 + \sum_{i=0}^N |w_{i+1N}(t) + w_{iN}(t)|^2 \right) dt \\ &- \frac{1}{6h} \int_0^T \left( \sum_{j=0}^N |w_{Nj}(t)|^2 + \sum_{i=0}^N |w_{iN}(t)|^2 \right) dt - \|(-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0)\|_0 \| (W_h(0), W_h'(0)) \|_0 \\ &\geq C(T) \| (W_h^0, W_h^1) \|_0^2 - \|(-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0)\|_0 \| (W_h^0, W_h^1) \|_0, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim_{\| (W_h^0, W_h^1) \|_0 \rightarrow \infty} J_h(W_h^0, W_h^1) = \infty.$$

Soit  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)$  le minimum de  $J_h$ . On pose  $v_h = (v_{h,j})_{1 \leq j \leq N} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$  et  $z_h = (z_{h,i})_{1 \leq i \leq N} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$  par

$$(1.4.120) \quad v_{h,j}(t) = -\frac{\widehat{W}_{Nj}}{h}, \quad z_{h,i}(t) = -\frac{\widehat{W}_{iN}}{h}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N,$$

où  $(\widehat{W}_h, \widehat{W}_h')$  est solution de (1.4.114) avec donnée initiale  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)$ .

Notre but est de montrer que la suite  $(v_h, z_h)_{h>0}$  converge vers le contrôle  $(v, z)$  de (1.4.105). Puisque  $v_h$  et  $z_h$  appartiennent à  $L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$  tandis que  $v$  et  $z$  sont dans  $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ , la convergence est obtenue via les séries de Fourier.

Soit  $\mathcal{I}_N = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq |n| \leq N, 1 \leq m \leq N\}$ .

**Lemme 1.4.27.** Les valeurs propres  $\lambda_h^{nm}$ ,  $(n, m) \in \mathcal{I}_N$  de (1.4.114) sont données par

$$(1.4.121) \quad \lambda_h^{nm} = \operatorname{sgn}(n) \frac{2}{h} \sqrt{\tan^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) + \frac{2}{3} \tan^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right) \tan^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}.$$

Les fonctions propres correspondantes sont

$$(1.4.122) \quad \Psi_h^{nm} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\frac{n\pi h}{2}) \cos(\frac{m\pi h}{2})} \begin{pmatrix} (i\lambda_h^{nm})^{-1} \Phi_h^{nm} \\ -\Phi_h^{nm} \end{pmatrix}, \quad \forall (n, m) \in \mathcal{I}_N,$$

où  $\Phi_h^{nm} = (\phi_h^n \sin(pm\pi h))_{1 \leq p \leq N} \in \mathbb{R}^{N^2}$  et  $\phi_h^n = (\sin(jn\pi h))_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N$ .

$(\Psi_h^{nm})_{(n,m) \in \mathcal{I}_N}$  forme une base orthonormale de  $\mathbb{R}^{2N^2}$  par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ .

Pour tout  $(f^1, f^2), (g^1, g^2) \in \mathbb{R}^{2N^2}$ , on introduit les notations

$$\begin{aligned} \langle (f^1, f^2), (g^1, g^2) \rangle_{-1} &= \langle (-K_h^{-1} M_h f^2, f^1), (-K_h^{-1} M_h g^2, g^1) \rangle_0, \\ \|(f^1, f^2)\|_{-1} &= \|(-K_h^{-1} M_h f^2, f^1)\|_0. \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  est un produit scalaire et  $\|\cdot\|_{-1}$  une norme de  $\mathbb{R}^{2N^2}$ .

### Convergence du contrôle approché

On obtient alors la convergence faible de la suite  $(v_h, z_h)_{h>0}$  vers le contrôle HUM de l'équation continue (1.4.105). Pour cela, on borne les données initiales correspondant à  $(v_h, z_h)$ .

**Théorème 1.4.28.** Soit  $T > 2\sqrt{3}$ . La suite de minimum de  $J_h$  donnée par le théorème 1.4.26,  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)_{h>0}$ , vérifie

$$(1.4.123) \quad \|(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)\|_0 \leq \frac{1}{C} \|(-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0)\|_0,$$

où  $C = C(T)$  est la constante d'observabilité de (1.4.118) indépendante de  $h$ .

Il en résulte que si la séquence discrète  $(U_h^0, U_h^1)_{h>0}$  est bornée uniformément pour  $\|\cdot\|_{-1}$  alors il en est de même pour  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)_{h>0}$  pour  $\|\cdot\|_0$ .

**Remarque 1.4.29.** La séquence  $(v_h, z_h)_{h>0}$  vérifie l'inégalité

$$(1.4.124) \quad \begin{aligned} \frac{h}{2} \int_0^T \left[ \langle C_h v_h', v_h' \rangle + \langle C_h z_h', z_h' \rangle - \langle B_h v_h, v_h \rangle - \langle B_h z_h, z_h \rangle \right] dt \\ \leq \frac{1}{C} \|(-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0)\|_0^2 = \frac{1}{C} \|(U_h^0, U_h^1)\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Supposons que la suite  $(U_h^0, U_h^1)_{h>0}$ , converge faiblement vers  $(u^0, u^1)$  dans  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , au sens de la convergence des coefficients de Fourier. Précisément, si

$$(U_h^0, U_h^1) = \sum_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} \alpha_{nm}^h \Phi_h^{nm}, \quad (u^0, u^1) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*} \alpha_{nm} \Phi^{nm},$$

alors dans  $\ell^2$ , on a

$$(1.4.125) \quad \left( \frac{\alpha_{nm}^h}{\lambda_h^{nm}} \right)_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} \rightarrow \left( \frac{\alpha_{nm}}{\lambda^{nm}} \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*}, \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Supposons que  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)$  prenne la forme

$$(1.4.126) \quad (\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1) = \sum_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} a_{nm}^h \Psi_h^{nm}.$$

Il résulte de (1.4.123) que

$$\sum_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} |a_{nm}^h|^2 = \|(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)\|_0^2 \leq \frac{1}{C^2} \|(-K_h^{-1} M_h U_h^1, U_h^0)\|_0^2 = \frac{1}{C^2} \sum_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} \left| \frac{\alpha_{nm}^h}{\lambda_h^{nm}} \right|^2.$$

Le terme de droite est borné en raison de (1.4.125). Les coefficients  $(a_{nm}^h)_{(n,m) \in \mathcal{I}_N}$  sont alors bornés dans  $\ell^2$  de sorte qu'il existe  $(a_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*} \in \ell^2$  tel que

$$(1.4.127) \quad (a_{nm}^h)_{(n,m) \in \mathcal{I}_N} \rightarrow (a_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ dans } \ell^2 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Soient enfin les données initiales

$$(1.4.128) \quad (\widehat{w}^0, \widehat{w}^1) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*} a_{nm} \Psi^{nm} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

et la solution correspondante  $(\widehat{w}, \widehat{w}') \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ . Il vient

$$\begin{aligned} \widehat{w}_x(t, 1, y) &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} i a_{nm} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2} n \pi}{\lambda^{nm}} e^{i \lambda^{nm} t} \right) \sin(m \pi y) := v, \\ \widehat{w}_y(t, x, 1) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}^*} i a_{nm} (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2} m \pi}{\lambda^{nm}} e^{i \lambda^{nm} t} \right) \sin(n \pi x) := w. \end{aligned}$$

Si  $(\widehat{W}_h, \widehat{W}_h')$  est la solution de (1.4.114) associée à  $(\widehat{W}_h^0, \widehat{W}_h^1)$ , il vient que

$$\begin{aligned} v_h &= \sum_{1 \leq m \leq N} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} i a_{nm}^h (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_h^{nm} \cos(\frac{n\pi h}{2}) \cos(\frac{m\pi h}{2})} \sin(n\pi h) e^{i \lambda_h^{nm} t} \right) \phi_h^m, \\ z_h &= \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left( \sum_{1 \leq m \leq N} i a_{nm}^h (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_h^{nm} \cos(\frac{n\pi h}{2}) \cos(\frac{m\pi h}{2})} \sin(m\pi h) e^{i \lambda_h^{nm} t} \right) \phi_h^n. \end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned} b_m^h &= \begin{cases} \sum_{1 \leq |n| \leq N} i a_{nm}^h (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_h^{nm} \cos(\frac{n\pi h}{2}) \cos(\frac{m\pi h}{2})} \sin(n\pi h) e^{i \lambda_h^{nm} t}, & \text{si } 1 \leq m \leq N, \\ 0, & \text{si } m > N, \end{cases} \\ b_m &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} i a_{nm} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2} n \pi}{\lambda^{nm}} e^{i \lambda^{nm} t}, \\ d_n^h &= \begin{cases} \sum_{1 \leq m \leq N} i a_{nm}^h (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_h^{nm} \cos(\frac{n\pi h}{2}) \cos(\frac{m\pi h}{2})} \sin(m\pi h) e^{i \lambda_h^{nm} t}, & \text{si } 1 \leq |n| \leq N, \\ 0, & \text{si } |n| > N, \end{cases} \\ d_n &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} i a_{nm} (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{2} m \pi}{\lambda^{nm}} e^{i \lambda^{nm} t}. \end{aligned}$$

on obtient alors le résultat de convergence suivant :



**Théorème 1.4.30.** *Supposons que la suite  $(U_h^0, U_h^1)_{h>0}$  converge faiblement vers  $(u^0, u^1)$  au sens de (1.4.125). Quand  $h$  tend vers zéro, la convergence faible dans  $L^2$  a lieu*

$$(b_m^h)_{m \in \mathbb{N}^*} \rightharpoonup (b_m)_{m \in \mathbb{N}^*}, \quad (d_n^h)_{n \in \mathbb{Z}^*} \rightharpoonup (d_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}, \\ (h(b_m^h)')_{m \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0, \quad (h(d_n^h)')_{n \in \mathbb{Z}^*} \rightarrow 0.$$

En particulier,  $(v_h, z_h)_{h>0}$  converge faiblement vers  $(v, z)$  dans  $[L^2((0, T) \times (0, 1))]^2$ . ■

Enfin, on obtient que la limite  $(v, z)$  de la suite  $(v_h, z_h)_{h>0}$  obtenue au Théorème 1.4.30 est le contrôle HUM pour (1.4.105).

**Théorème 1.4.31.**  $(v, z) = (\widehat{w}_x(t, 1, y), \widehat{w}_y(t, x, 1))$  est le HUM contrôle pour (1.4.105), où  $(\widehat{w}, \widehat{w}')$  est la solution de (1.2.4) avec données initiales  $(\widehat{w}^0, \widehat{w}^1)$  définies par (1.4.128). ■

On renvoie à [4] pour les détails et à la section suivante pour quelques simulations numériques.

### 1.4.3 Contrôlabilité 2-D et discrétisation complète temps - espace

Dans la section précédente, nous avons discuté de la semi-discrétisation de l'équation des ondes. D'un point de vue pratique, cela est assez peu exploitable (sauf résolution analytique en temps via la connaissance explicite du spectre sur des géométries simples). Très probablement, ce qui précède se généralise au cas complètement discret, au prix de développements longs et fastidieux. Dans la suite, on discute formellement de l'obtention de schémas uniformément contrôlables relativement aux propriétés spectrales. A l'image de la section 1.4.1, la démarche reste constructive en introduisant plusieurs paramètres. On commence par le faire dans le cas semi-discret, généralisant la section précédente. On renvoie pour les détails à [3].

#### Etape 1 : Un schéma semi-discret paramétré

On considère trois paramètres  $\alpha, \beta_1$  et  $\beta_2$  indépendants de  $h$  tels que  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in [0, 1/4] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  et  $2\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ . Dans la suite, on utilise la notation  $\mathcal{W}_{ij} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  pour

$$(1.4.129) \quad \mathcal{W}_{ij} = \begin{pmatrix} w_{i-1j+1} & w_{ij+1} & w_{i+1j+1} \\ w_{i-1j} & w_{ij} & w_{i+1j} \\ w_{i-1j-1} & w_{ij-1} & w_{i+1j-1} \end{pmatrix}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

On introduit alors l'approximation semi-discrete de l'équation des ondes notée  $(\mathcal{W})$  :

$$(1.4.130) \quad (\mathcal{W}_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}) \begin{cases} \mathcal{M}_\alpha \cdot \mathcal{W}_{ij}'''(t) - \frac{1}{h^2} \mathcal{K}_{\beta_1, \beta_2} \cdot \mathcal{W}_{ij}(t) = 0, & 1 \leq i, j \leq N, \quad 0 \leq t \leq T, \\ w_{i0}(t) = w_{iN+1}(t) = w_{0j}(t) = w_{N+1j}(t) = 0, & 0 \leq i, j \leq N+1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (w_{ij}(T), w'_{ij}(T)) = (w_{ij}^0, w_{ij}^1), & 0 \leq i, j \leq N+1, \end{cases}$$

avec

$$(1.4.131) \quad \mathcal{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha(1-2\alpha) & \alpha^2 \\ \alpha(1-2\alpha) & (1-2\alpha)^2 & \alpha(1-2\alpha) \\ \alpha^2 & \alpha(1-2\alpha) & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_{\beta_1, \beta_2} = \frac{1}{2\beta_1 + \beta_2} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & -4(\beta_1 + \beta_2) & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Le point dans (1.4.130) désigne la multiplication composante par composante. Ce schéma est consistant et d'ordre deux avec l'équation des ondes.



La vitesse de groupe associée au mode  $\xi$  dans la direction  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  étant donnée par  $\nabla_\xi \omega_h \cdot \nu$ , on obtient

**Lemme 1.4.34** (Borne sur la vitesse de groupe semi-discrète pour  $(\mathcal{W}_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$ ).

– Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in [0, 1/4) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $2\beta_1 + \beta_2 > 0$ ,

$$(1.4.140) \quad O(h) \leq |\nabla_\xi \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| \leq 1, \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2;$$

– Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$ ,

$$(1.4.141) \quad 1 \leq |\nabla_\xi \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| \leq O(h^{-3}), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2;$$

– Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}$ ,

$$(1.4.142) \quad 1 \leq |\nabla_\xi \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| \leq O(h^{-2}), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2.$$

■

Il résulte de ce lemme que le premier cas ne conduit pas à une vitesse de groupe uniformément minorée et est donc à rejeter. Le dernier cas est naturellement conforme à la section précédente. Après avoir obtenu une famille de schémas dont la vitesse de groupe est uniformément bornée, une première possibilité est de résoudre exactement en temps le système de dimension finie (1.4.114) en utilisant une approche spectrale (par exemple [Bou93] dans un contexte similaire et l'annexe de [3]). La seconde possibilité, analysée maintenant, consiste à introduire une approximation en temps et de voir pour quelles valeurs du triplet  $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$  les propriétés spectrales se préservent.

## Étape 2 : Un schéma paramétré discret

A partir de (1.2.4), on utilise un schéma *Leapfrog* en temps pour obtenir

$$(1.4.143) \quad (\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}) \begin{cases} M^\alpha \frac{W_h^{k+1} - 2W_h^k + W_h^{k-1}}{\Delta t^2} + K_h^{\beta_1, \beta_2} W_h^k = 0, & 0 \leq k \leq K, \\ W_h^K = w_h^0, & \frac{W_h^{K+1} - W_h^{K-1}}{2\Delta t} = w_h^1, \end{cases}$$

constant d'ordre 2 en espace et en temps avec (1.2.4).  $\Delta t$  désigne le pas en temps. Le schéma  $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  est stable sous la condition Courant-Friedrichs-Levy (CFL) :

$$(1.4.144) \quad \frac{\Delta t^2}{4} \sup_{(V \in \mathbb{R}^{N^2}, V \neq 0)} \frac{\langle K_h^{\beta_1, \beta_2} V, V \rangle}{\langle M^\alpha V, V \rangle} \leq 1,$$

soit

$$(1.4.145) \quad \frac{\Delta t^2}{4} \sup_{\xi \in (0, \pi/h)^2} (\omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi))^2 \leq 1.$$

Le lien entre stabilité et propriété de dispersion est illustré de la façon suivante :

**Lemme 1.4.35** (Condition de stabilité pour  $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$ ). – Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in [0, 1/4) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $2\beta_1 + \beta_2 > 0$ ,  $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  est stable sous la condition  $\Delta t \leq Ch$ .

– Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$ ,  $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  est stable sous la condition  $\Delta t \leq (\pi^2 / \sqrt{32})h^3$ .

– Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}$ ,  $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  est stable sous la condition  $\Delta t \leq (\pi / \sqrt{8})h^2$ .

■

Signalons que le schéma implicite  $(\mathcal{W}_{h,\Delta t}^{1/4,1,0})$  a été introduit dans [Ras04]. Si on élimine le premier cas non uniformément contrôlable, les autres cas conduisent à de fortes restrictions. Heureusement, ces conditions peuvent être relaxées - via une méthode de type Newmark - en remplaçant le terme  $K_h^{\beta_1, \beta_2} \mathbf{W}_h^k$  de (1.4.143) par  $1/4 K_h^{\beta_1, \beta_2} (\mathbf{W}_h^{k+1} + 2\mathbf{W}_h^k + \mathbf{W}_h^{k-1})$  menant au schéma inconditionnellement stable

$$(1.4.146) \quad (\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}) \left\{ \begin{array}{l} (M^\alpha + \frac{\Delta t^2}{4} K_h^{\beta_1, \beta_2}) \frac{\mathbf{W}_h^{k+1} - 2\mathbf{W}_h^k + \mathbf{W}_h^{k-1}}{\Delta t^2} + K_h^{\beta_1, \beta_2} \mathbf{W}_h^k = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq K, \\ \mathbf{W}_h^K = \mathbf{w}_h^0, \quad \frac{\mathbf{W}_h^{K+1} - \mathbf{W}_h^{K-1}}{2\Delta t} = \mathbf{w}_h^1. \end{array} \right.$$

Il reste alors à analyser si ce schéma discret  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  conserve la propriété d'observabilité du cas semi-discret pour au moins un triplet  $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ .

Procédant comme précédemment, on analyse la vitesse de groupe pour des ondes planes discrètes de la forme

$$(1.4.147) \quad w_{ij}^k = e^{i(\xi \cdot (x_i, x_j) - \omega_{h,\Delta t} k \Delta t)}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad i^2 = -1.$$

Pour le schéma (1.4.143), on obtient les relations entre le mode  $\xi$  et la fréquence  $\omega_{h,\Delta t}$  :

$$(1.4.148) \quad \omega_{h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left( \frac{\Delta t}{2} \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi) \right),$$

tandis que pour (1.4.146), on a

$$(1.4.149) \quad \omega_{N,h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left( \frac{\Delta t}{2} \sqrt{1 + \frac{\Delta t^2}{4} \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)^2} \right).$$

La vitesse de groupe associée au mode  $\xi$  dans la direction  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  est donnée par  $\nabla_\xi \omega_{h,\Delta t} \cdot \mathbf{v}$  de sorte qu'une condition nécessaire d'observabilité uniforme (en  $h$  et  $\Delta t$ ) au temps  $T > T^*$  est une borne inférieure (en  $\xi$ ,  $h$  et  $\Delta t$ ) pour  $|\nabla_\xi \omega_{h,\Delta t}| = \sqrt{|\partial_{\xi_1} \omega_{h,\Delta t}|^2 + |\partial_{\xi_2} \omega_{h,\Delta t}|^2}$ . Il vient

**Lemme 1.4.36** (Borne pour la vitesse de groupe discrète).

- Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in [0, 1/4) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $2\beta_1 + \beta_2 > 0$ ,

$$(1.4.150) \quad \min_{\xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega_{h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| = O(h);$$

- Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$ ,

$$(1.4.151) \quad \min_{\xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega_{N,h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| = O(h^{3/2} \Delta t^{-1});$$

- Pour tout  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \{1/4\} \times \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}$ ,

$$(1.4.152) \quad \min_{\xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega_{N,h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2}(\xi)| = \min(1, \frac{1}{2} h^2 \Delta t^{-2}) + O(h^3 \Delta t^{-2}).$$

■

De façon attendue, la vitesse de groupe associée à  $(\mathcal{W}_{h,\Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$  et  $\alpha \in [0, 1/4)$  n'est pas uniformément mino- rée. En particulier, le schéma standard à 5 points  $(\mathcal{W}_{h,\Delta t}^{0,0,1})$  n'est pas uniformément contrôlable. Inversement, pour  $\alpha = 1/4$  et  $\beta_2 \neq 0$  (en particulier le schéma  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,1})$  de [4]), on a une borne uniforme si et seulement si  $\Delta t$  est de l'ordre de  $h^{3/2}$ . Finalement, le schéma  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4, \beta_1, 0}) \equiv (\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,0})$  pour tout  $\beta_1 > 0$  est uniformément borné inférieurement si  $\Delta t$  et  $h$  sont du même ordre. En particulier, pour  $\Delta t \leq h/\sqrt{2}$ , la vitesse de groupe est supérieure à celle du cas continu pour toutes les composantes. Ces résultats sont résumés dans le tableau 1.2.

**Remarque 1.4.37.** *A fortiori* pour l'approximation discrète, on ne sait pas si la condition spectrale discutée ici est suffisante pour garantir la contrôlabilité uniforme. En adaptant au cas discret la preuve de [4] basée sur la méthode des multiplicateurs semi-discrets et suivant [15], on peut conjecturer une relation similaire à (1.4.118) avec une somme sur  $n = 0, \dots, K$  en lieu et place de l'intégrale sur  $(0, T)$ . ■

$(\alpha, \beta_1, \beta_2)$	$ \nabla \omega_h^{\alpha, \beta_1, \beta_2} $	CFL for $(\mathcal{W}_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2})$	$ \nabla \omega_{h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2} $	$ \nabla \omega_{N, h, \Delta t}^{\alpha, \beta_1, \beta_2} $
$\in [0, 1/4) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$	$\in (O(h), 1)$	$\Delta t = O(h)$	$\in (O(h), 1)$	-
$\in \{1/4\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$	$\in (1, O(h^{-3}))$	$\Delta t = O(h^3)$	-	$O(h^{3/2} \Delta t^{-1})$
$\in \{1/4\} \times \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}$	$\in (1, O(h^{-2}))$	$\Delta t = O(h^2)$	-	$O(h^2 \Delta t^{-2})$

TAB. 1.2: Illustration de l'équilibre entre dispersion numérique et stabilité.

En conclusion, l'usage crucial de la méthode de Newmark mène au schéma  $(\mathcal{W}_{N, h, \Delta t}^{1/4, 1, 0})$  stable sous la condition  $\Delta t = O(h)$  et - probablement (voir Remarque 1.4.37) - uniformément contrôlable. Par ailleurs, ce schéma est très peu dispersif avec un spectre  $\{\omega_{N, h, \Delta t}^{1/4, 1, 0}(\xi)\}$  très proche du spectre continu  $\{\omega(\xi)\}_{\xi \in (0, \pi/h)}$  défini par  $\omega(\xi) = |\xi|$  : pour  $\Delta t = h/\sqrt{2}$ , on a

$$(1.4.153) \quad \omega(\xi) \leq \omega_{N, h, h/\sqrt{2}}^{1/4, 1, 0}(\xi) \leq \sqrt{2} \omega(\xi), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2,$$

et la remarquable égalité pour  $\xi = (\xi_1, \xi_1) : \omega(\xi_1, \xi_1) = \omega_{N, h, h/\sqrt{2}}^{1/4, 1, 0}(\xi_1, \xi_1)$ .

### Quelques simulations numériques

Donnons quelques résultats graphiques (renvoyant à [3] pour un développement complet). A nouveau, nous considérons le cas le plus critique où le déplacement initial est discontinu : précisément

$$(1.4.154) \quad y^0(x) = \begin{cases} 40 & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad ; \quad y^1(x) = 0.$$

On suppose que le contrôle est actif sur deux cotés consécutifs tel que  $\Gamma_0(0, 0) \equiv \{x \in \partial\Omega, (1-x)(1-y) = 0\}$  (voir eq. 1.2.3) et on prend  $T = 3 > 2\sqrt{2}$ .

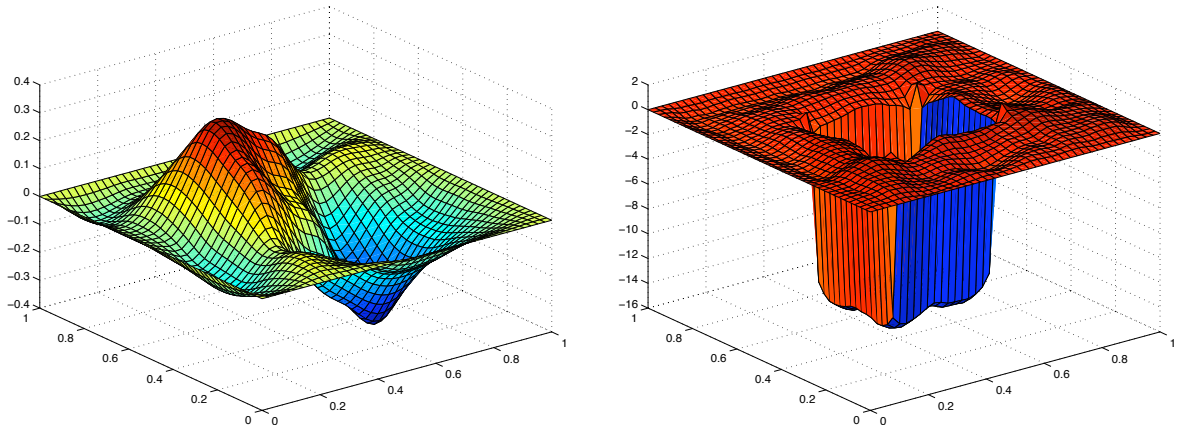


FIG. 1.14: Donnée initiale  $(w_h^0, w_h^1)$  sur  $\Omega$  du problème adjoint, minimum de  $J_h$ .

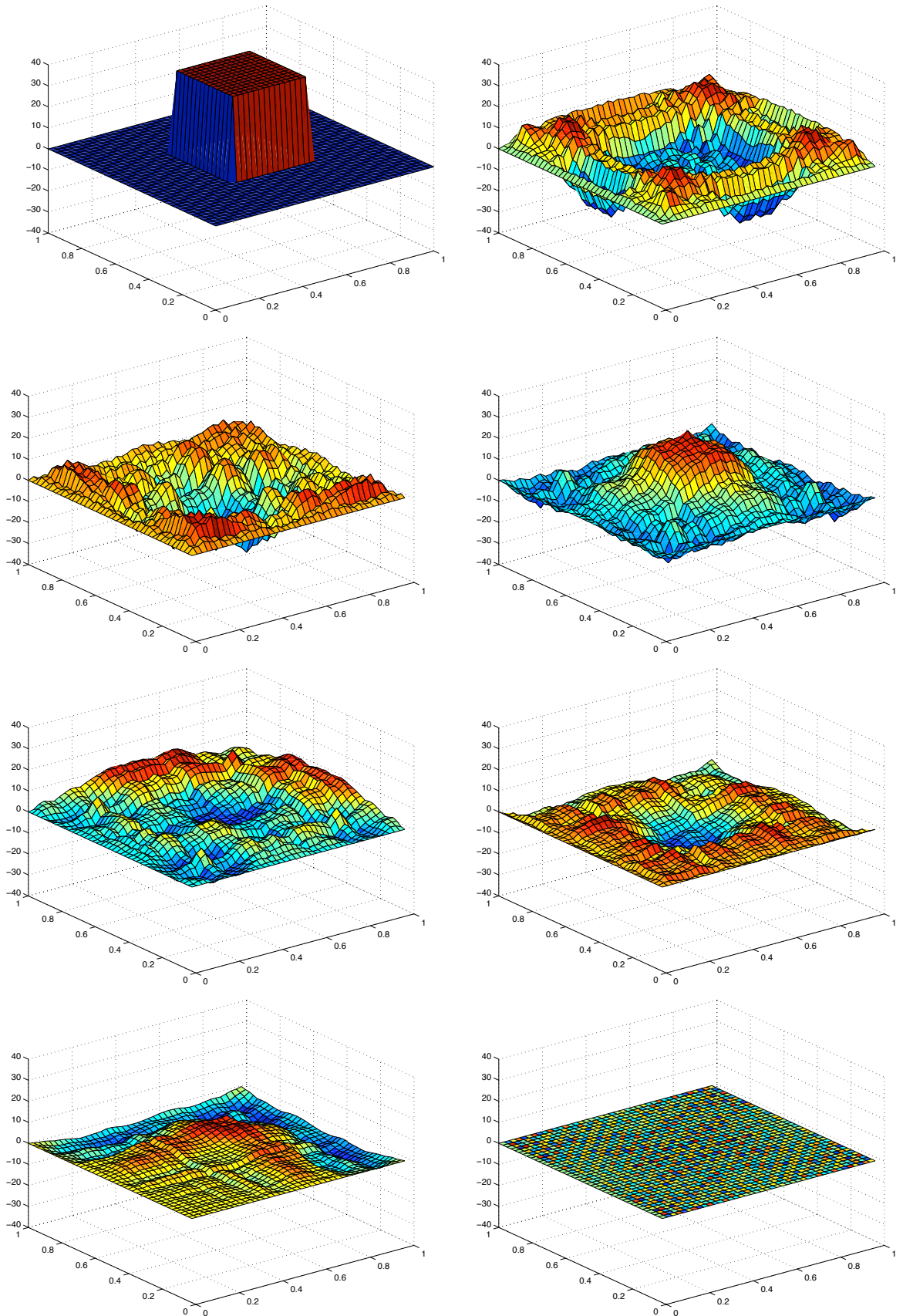


FIG. 1.15: Stabilisation des conditions initiales (1.4.154) - Approximation  $y_h(t)$  sur  $\Omega$  pour  $t = 0, 3/7, 6/7, 9/7, 12/7, 15/7, 18/7$  et  $T = 3$ .

### Contrôlabilité exacte en temps long

Un moyen simple et efficace pour *valider* les schémas est d'utiliser le comportement asymptotique de l'opérateur HUM lorsque  $T \rightarrow \infty$  : précisément, il est montré dans [Ben90]

$$(1.4.155) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_T}{T} = 2 \begin{bmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

où  $\Lambda_T$  désigne l'opérateur d'HUM correspondant au temps  $T$ . Ce résultat implique immédiatement que la donnée initiale  $(e_T^0, e_T^1)$  du problème adjoint vérifie la relation

$$(1.4.156) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T(e_T^0, e_T^1) = (\chi^0, \chi^1)$$

où  $\chi^0$  and  $\chi^1$  sont solutions de  $\Delta \chi^0 = y^1/2$  dans  $\Omega$ ,  $\chi^0 = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\chi^1 = y^0/2$  dans  $\bar{\Omega}$  (on renvoie également à [Des05] pour une approche similaire en temps long).

L'évaluation de  $(e_T^0, e_T^1)$  utilisant le schéma  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,0})$  est coûteuse pour de larges valeurs de  $T$  si  $\Delta t$  vérifie  $\Delta t \leq h/\sqrt{2}$ . En fait, la vitesse de groupe étant bornée inférieurement par  $h^2\Delta t^{-2}/2$ , toutes les ondes discrètes rencontrent le support du contrôle en un temps inférieur ou égal à  $T$  si  $T(h^2\Delta t^{-2}/2) \geq \text{diam}(\Omega) = \sqrt{2}$ , soit la condition relaxée

$$(1.4.157) \quad \Delta t \leq h \sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}.$$

Remarquons l'analogie entre (1.4.26) et la relation  $\Delta t \leq h\sqrt{T/2}$ . La relation (1.4.157) utilisée avec  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,0})$  permet des temps longs.

Le tableau 1.3 donne la différence  $T(e_{Th}^0, e_{Th}^1) - (\chi_h^0, \chi_h^1)$  obtenue avec  $(\mathcal{W}_{N,h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0})$ . La propriété (1.4.155) est observée numériquement. On obtient  $\|Te_{Th}^0 - \chi_h^0\|_{H_0^1(\Omega)} = O(T^{-1.10})$  et  $\|Te_{Th}^1 - \chi_h^1\|_{L^2(\Omega)} = O(T^{-1.0087})$ .

	$T = 3$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 20$	$T = 40$
CG itérations	13	9	8	8	5
$\ Te_{Th}^0 - \chi_h^0\ _{H_0^1(\Omega)}$	$7.15 \times 10^{-1}$	$3.4 \times 10^{-1}$	$1.40 \times 10^{-1}$	$1.11 \times 10^{-1}$	$3.3 \times 10^{-2}$
$\ Te_{Th}^1 - \chi_h^1\ _{L^2(\Omega)}$	$4.12 \times 10^{-1}$	$2.21 \times 10^{-1}$	$1.55 \times 10^{-1}$	$8.46 \times 10^{-2}$	$2.47 \times 10^{-2}$

TAB. 1.3:  $(\mathcal{W}_{N,h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0}) - \|Te_{Th}^0 - \chi_h^0\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|Te_{Th}^1 - \chi_h^1\|_{L^2(\Omega)}$  vs.  $T - \varepsilon = 10^{-8} - h = 1/64$ .

Il est également possible de tester le schéma à la limite de contrôlabilité  $T^*$  (la robustesse du schéma est alors essentielle). On renvoie à [3]. Parmi tous les schémas existants, le schéma  $(\mathcal{W}_{N,h,\Delta t}^{1/4,1,0})$  obtenu par cette analyse semble être le plus efficace en terme de robustesse.

**Remarque 1.4.38.** – On peut approcher numériquement de façon différente le problème de la contrôlabilité exacte : pour tout  $h > 0$  fixé, chercher une fonction contrôle  $(v_h)_h$  telle que la solution satisfasse  $E_h(y_h, T) \leq O(h)$ . A  $h$  fixé, on résout un problème de contrôlabilité approchée, qui est numériquement *mieux* posé. En revanche, on constate que la convergence de la suite de contrôle  $(v_h)$  vers le contrôle continu  $v$  est très lente, typiquement  $\|P_h(v_h) - v\|_{L^2(0,T)} = O(h^\alpha)$ ,  $\alpha < 1/2$ , rendant cette stratégie peu exploitable (dans le cadre de l'équation de la chaleur, voir [LT06] où  $\alpha \approx 1/4$  est observé).

– Le terme ajouté au schéma numérique (par exemple  $(h^2 - \Delta t^2)\Delta_{\Delta t}\Delta_h y_h$  dans la section 1.4.1) apparaît comme un contrôle exprimé directement en terme de la solution  $y_h$  et agissant sur le domaine tout entier.

De ce fait, il serait intéressant de déterminer un couple de contrôles exacts  $(\tilde{v}_h, v_h)$  pour l'état  $y_h$  agissant de la façon suivante (écrit ici dans un cadre semi-discret) :

$$(1.4.158) \quad y_h'' - \Delta_h y_h + h^2 \tilde{v}_h \mathcal{X}_\Omega(\mathbf{x}) = v_h \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}), \quad (0, T) \times \Omega$$

et de norme  $L^2$  minimale. ■

## 1.5 Le cas de la stabilisation numérique

La même pathologie numérique a lieu dans le cadre de la stabilisation en temps long. Développons la référence [22], en collaboration avec ADEMIR FERNANDO PAZOTO<sup>3</sup>, qui étend à des domaines quelconques  $\Omega$  de  $C^2(\mathbb{R}^2)$  le cas 1-D ou du carré unité traité dans [TTZ03] (voir Figure 1.16). On renvoie également à [RTT06] et [RTT07] pour des travaux récents et similaires. Une des premières références étudiant ce phénomène de perte de stabilisation numérique est due à H.T. BANKS [BIW91].

Dans le cas de la stabilisation interne localisée dans  $\omega$  inclus dans  $\Omega$  et supposant l'hypothèse d'optique géométrique sur  $\omega$ , la solution  $y$  unique de (1.3.15) décroît exponentiellement en temps : il existe  $c$  et  $\alpha$  positifs tels que

$$(1.5.159) \quad E(t, y(t)) \leq CE(0, y(0))e^{\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

Dans le cas linéaire, les notions de contrôlabilité et stabilisation exponentielle sont équivalentes : elles sont la conséquence de l'observabilité du système adjoint : la stabilisation exponentielle se démontre ainsi en utilisant la méthode des multiplicateurs. D'un point de vue numérique, il s'agit alors de reproduire numériquement cette propriété de décroissance, *uniformément* par rapport aux paramètres de discrétisation : pour les raisons évoquées précédemment, la présence des hautes fréquences est responsable de la non décroissance exponentielle uniforme : le taux  $\alpha_h$  associé aux schémas standards n'est pas minoré uniformément par rapport à  $h$ . Afin de restaurer la convergence uniforme, il convient à nouveau de modifier le schéma de façon, ici, à filtrer ces hautes fréquences *pathologiques*.

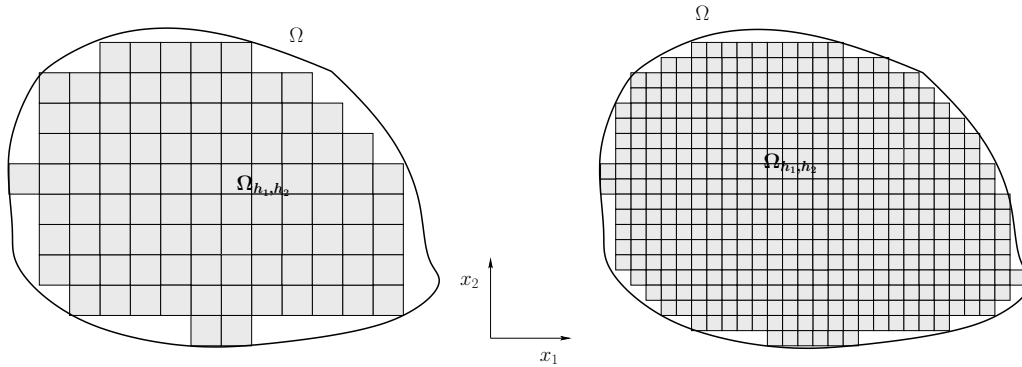


FIG. 1.16: Domaine  $\Omega$  et deux discrétisations  $\Omega_{h_1, h_2}$  telles que  $\Omega_{h_1, h_2} \subset \Omega$ .

### 1.5.1 Discrétisation du domaine $\Omega_{h_1, h_2}$ approximation de $\Omega$

On suppose, pour les besoins de la discrétisation, que le domaine  $\Omega$  est inclus dans le carré unité :  $\Omega \subset B \equiv (0, 1)^2$ . Soient deux entiers  $J$  and  $K$  et les pas de discrétisation

$$(1.5.160) \quad h_1 = \frac{1}{J+1}, \quad h_2 = \frac{1}{K+1},$$

<sup>3</sup>Instituto de Matemática, Universidad Federal do Rio de Janeiro, Brasil.



à partir desquels on forme les subdivisions uniformes de l'intervalle  $(0, 1)$

$$(1.5.161) \quad \begin{cases} 0 = x_{1,0} < x_{1,1} < \dots < x_{1,J} < x_{1,J+1} = 1, \\ 0 = x_{2,0} < x_{2,1} < \dots < x_{2,K} < x_{2,K+1} = 1, \end{cases}$$

avec  $x_{1,j} = jh_1$  et  $x_{2,k} = kh_2$  pour  $j \in [0, J+1]$  et  $k \in [0, K+1]$ . On associe alors à la grille  $G = (x_{1,j}, x_{2,k})_{j,k}$  la discrétisation  $\mathbf{B}_{h_1, h_2}$  de  $B$  :  $\mathbf{B}_{h_1, h_2} = \cup_{j \in [0, J], k \in [0, K]} B_{j,k}$ , avec

$$(1.5.162) \quad B_{j,k} = ]x_{1,j}, x_{1,j+1}[ \times ]x_{2,k}, x_{2,k+1}[.$$

$\Omega_{h_1, h_2}$  est alors construit comme l'union des  $B_{j,k}$  inclus strictement dans  $\Omega$  :

$$(1.5.163) \quad \Omega_{h_1, h_2} = \cup_{j,k} B_{j,k}, \quad \forall j \in [0, J], k \in [0, K] \quad \text{tel que} \quad B_{j,k} \subset \Omega$$

de façon à ce que  $\Omega_{h_1, h_2} \subset \Omega$  pour tout  $h_1, h_2$ . On peut écrire

$$(1.5.164) \quad \Omega_{h_1, h_2} = \cup_{j=0, J} \cup_{k \in \mathcal{I}_j} B_{j,k}, \quad \mathcal{I}_j = \left\{ k \in [0, K] : B_{j,k} \subset \Omega_{h_1, h_2} \right\}, \quad j \in [0, J].$$

De la même manière, on construit l'approximation  $\omega_{h_1, h_2}$  de l'ouvert  $\omega$  comme l'union des  $B_{j,k}$  dans  $\omega$ . Cela permet alors de décrire la frontière de  $\Omega_{h_1, h_2}$  composée de segment  $\tilde{I}(j, k)$  et  $\hat{I}(j, k)$  parallèles aux axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$ , respectivement

$$(1.5.165) \quad \tilde{I}(j, k) = \{j\} \times [k, k+1] \quad \text{and} \quad \hat{I}(j, k) = [j, j+1] \times \{k\},$$

pour  $j \in [0, J]$  et  $k \in [0, K]$ . Précisément,

$$(1.5.166) \quad \tilde{I}(j, k) \subset \partial \Omega_{h_1, h_2} \quad \text{si} \quad (k \in \mathcal{I}_j \text{ et } k \notin \mathcal{I}_{j-1}) \quad \text{ou} \quad (k \notin \mathcal{I}_j \text{ et } k \in \mathcal{I}_{j-1})$$

et

$$(1.5.167) \quad \hat{I}(j, k) \subset \partial \Omega_{h_1, h_2} \quad \text{si} \quad (k \in \mathcal{I}_j \text{ et } k-1 \notin \mathcal{I}_j) \quad \text{ou} \quad (k \notin \mathcal{I}_j \text{ et } k-1 \in \mathcal{I}_j).$$

**Définition 1.5.1** (Frontière de  $\Omega_{h_1, h_2}$ ). *Les points suivants de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

- $\tilde{I}^+ = \{(j, k) \text{ tel que } k \in \mathcal{I}_{j-1}, k \notin \mathcal{I}_j, j \in [1, J+1]\}$  ;
- $\tilde{I}^- = \{(j, k) \text{ tel que } k \in \mathcal{I}_j, k \notin \mathcal{I}_{j-1}, j \in [0, J]\}$  ;
- $\hat{I}^+ = \{(j, k) \text{ tel que } k-1 \in \mathcal{I}_j, k \notin \mathcal{I}_j, j \in [0, J]\}$  ;
- $\hat{I}^- = \{(j, k) \text{ tel que } k-1 \notin \mathcal{I}_j, k \in \mathcal{I}_j, j \in [0, J]\}$

sont des nœuds de  $\partial \Omega_{h_1, h_2}$ .

## 1.5.2 Schéma aux différences finies semi-discret avec terme de viscosité

Avec les notations usuelles, on considère le schéma suivant :

$$(1.5.168) \quad \begin{cases} y''_{j,k} - \frac{y_{j+1,k} - 2y_{j,k} + y_{j-1,k}}{h_1^2} - \frac{y_{j,k+1} - 2y_{j,k} + y_{j,k-1}}{h_2^2} + a_{j,k} y'_{j,k} \\ \quad - h_1^2 \left( \frac{y'_{j+1,k} - 2y'_{j,k} + y'_{j-1,k}}{h_1^2} \right) - h_2^2 \left( \frac{y'_{j,k+1} - 2y'_{j,k} + y'_{j,k-1}}{h_2^2} \right) = 0 \\ \quad \text{pour } (j, k) \in \Omega_{h_1, h_2} \text{ et } t \in (0, \infty), \\ y_{j,k}(t) = 0 \quad \text{pour } (j, k) \in \partial \Omega_{h_1, h_2} \text{ et } t \in (0, \infty), \\ y_{j,k}(t) = (y^0)_{j,k}, \quad y'_{j,k}(t) = (y^1)_{j,k} \quad \text{pour } (j, k) \in \Omega_{h_1, h_2} \text{ et } t = 0 \end{cases}$$

constant avec l'équation des ondes amorties (1.3.15).  $y_{j,k}$  désigne l'approximation de la solution  $y$  au point  $(x_{1,j}, x_{2,k})$ .  $a_{j,k}$  désigne l'approximation de la fonction  $a$ , supposant l'existence d'une constante positive  $\alpha_0$  telle que

$$(1.5.169) \quad a_{j,k} \geq \alpha_0 \quad \forall (j, k) \in \omega_{h_1, h_2}.$$

Enfin, supposons que

$$(1.5.170) \quad \omega_{h_1, h_2} \text{ est l'intersection de } \Omega_{h_1, h_2} \text{ et d'un voisinage de } \tilde{I}^+ \cup \hat{I}^+.$$

L'énergie discrète associée

$$(1.5.171) \quad E_{h_1, h_2}(t) = \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathcal{I}_j} \left\{ (y'_{j,k})^2 + \left( \frac{y_{j+1,k} - y_{j,k}}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{y_{j,k+1} - y_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right\},$$

vérifie la loi de dissipation

$$(1.5.172) \quad E'_{h_1, h_2}(t) = -h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathcal{I}_j} a_{j,k} (y'_{j,k})^2 - h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathcal{I}_j} \left\{ h_1^2 \left( \frac{y'_{j+1,k} - y'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{y'_{j,k+1} - y'_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right\},$$

version semi-discrète de (1.3.16).

La décroissance exponentielle uniforme de la solution discrète de (1.5.168) a lieu si et seulement si il existe un temps  $T > 0$  et une constante  $C > 0$  indépendants de  $h_1$  et  $h_2$  tels que l'inégalité d'observabilité

$$(1.5.173) \quad E_{h_1, h_2}(0) \leq C h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathcal{I}_j} \int_0^T \left[ a_{j,k} (y'_{j,k})^2 + h_1^2 \left( \frac{y'_{j+1,k} - y'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{y'_{j,k+1} - y'_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right] dt$$

ait lieu pour chaque solution de (1.5.168).

**Remarque 1.5.2.** La première équation de (1.5.168) est formellement une semi-discrétisation de l'équation

$$(1.5.174) \quad y'' - \Delta y + a(x) X_\omega(x) y' - h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y' - h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y' = 0, \quad (0, T) \times \Omega.$$

Le terme de viscosité introduit dans le schéma - analogue à une régularisation de Tychonoff (voir [GLL90, Kre01]) - permet d'assurer l'indépendance de la constante  $C$  vis-à-vis de  $h_1, h_2$  - en amortissant les hautes fréquences pour lesquelles les quantités  $y'_{j+1,k} - 2y'_{j,k} + y'_{j-1,k}$  et  $y'_{j,k+1} - 2y'_{j,k} + y'_{j,k-1}$  ne sont pas négligeables (voir également [TTZ03]). Dans le cadre de l'approximation par éléments finis, la référence [RTT06] propose un terme similaire et montre notamment que la puissance en  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$  correspond au degré d'approximation (en espace) du schéma. Dans notre cas, l'approximation du laplacien est bien d'ordre deux. ■

### 1.5.3 Décroissance exponentielle uniforme

Le résultat principal de [22] est alors le suivant :

**Théorème 1.5.3** (Décroissance exponentielle uniforme). *Soient  $(a_{j,k})$  et  $\omega_{h_1, h_2}$  donnée par (1.5.169) et (1.5.170) respectivement. Il existe deux constantes positives  $C$  et  $\alpha$  indépendantes de  $(h_1, h_2)$  telles que l'énergie de (1.5.168) satisfasse*

$$(1.5.175) \quad E_{h_1, h_2}(t) \leq C E_{h_1, h_2}(0) e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall h_1, h_2 \in (0, 1),$$

pour chaque solution de (1.5.168). ■

Selon le théorème 1.5.3, la viscosité numérique ajoutée au système (1.5.168) permet de garantir la décroissance exponentielle uniforme par rapport à  $(h_1, h_2)$ . Cela généralise les cas  $\Omega = (0, 1)$  et  $\Omega = (0, 1)^2$  étudiés dans [TTZ03].

De façon standard, le problème est réduit de la façon suivante (voir [22] pour les détails). Pour avoir la décroissance exponentielle de (1.5.168), il est nécessaire et suffisant de montrer l'existence d'un temps  $T$  et d'une constante  $C > 0$  (indépendants de  $(h_1, h_2)$ ) tels que

$$(1.5.176) \quad E_{h_1, h_2}(0) \leq C h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathcal{I}_j} \int_0^T \left[ a_{j,k} (u'_{j,k})^2 + h_1^2 \left( \frac{u'_{j+1,k} - u'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{u'_{j,k+1} - u'_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right] dt$$

pour chaque solution  $u_{h_1, h_2}$  du système conservatif

$$(1.5.177) \quad \begin{cases} u''_{j,k} - \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h_1^2} - \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h_2^2} = 0 & \text{pour } (j, k) \in \Omega_{h_1, h_2} \text{ et } t \in (0, \infty), \\ u_{j,k}(t) = 0 & \text{pour } (j, k) \in \partial\Omega_{h_1, h_2} \text{ et } t \in (0, \infty), \\ u_{j,k}(0) = (y^0)_{j,k}, \quad u'_{j,k}(0) = (y^1)_{j,k} & \text{pour } (j, k) \in \Omega_{h_1, h_2} \end{cases}$$

et  $0 < h_1, h_2 < 1$ .

**Remarque 1.5.4.** Dans le cas particulier  $\omega = \Omega$ , on obtient aisément que

$$(1.5.178) \quad \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T \left[ h_1^2 \left( \frac{u'_{j+1,k} - u'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{u'_{j,k+1} - u'_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right] dt \leq C \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T a_{j,k} (u'_{j,k})^2 dt$$

impliquant que la preuve de (1.5.176) est réduite à celle de (1.5.173). Dans ce cas, les termes de viscosité ne sont pas nécessaires. ■

#### 1.5.4 Méthode des multiplicateurs

A l'image du cas de la contrôlabilité, il s'agit d'adapter la méthode des multiplicateurs au niveau discret. Dans ce cas, les intégrales en espace sont remplacées par des sommes finies. Le lemme important est le suivant :

**Lemme 1.5.5.** *L'énergie  $E_{h_1, h_2}$  satisfait la relation :*

$$(1.5.179) \quad \begin{aligned} TE_{h_1, h_2}(0) &= \int_0^T E_{h_1, h_2}(t) dt \\ &= -\frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} u'_{j,k} \left( j h_1 \left( \frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{h_1} \right) + \frac{u_{j,k}}{2} \right) \Big|_0^T \\ &\quad - \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} u'_{j,k} \left( k h_2 \left( \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{h_2} \right) + \frac{u_{j,k}}{2} \right) \Big|_0^T \\ &\quad - \frac{h_2}{2} \sum_{(j,k) \in \tilde{I}^-} j h_1 \int_0^T \left( \frac{u_{j+1,k}}{h_1} \right)^2 dt + \frac{h_2}{2} \sum_{(j,k) \in \tilde{I}^+} j h_1 \int_0^T \left( \frac{u_{j-1,k}}{h_1} \right)^2 dt \\ &\quad - \frac{h_1}{2} \sum_{(j,k) \in \tilde{I}^-} k h_2 \int_0^T \left( \frac{u_{j,k+1}}{h_2} \right)^2 dt + \frac{h_1}{2} \sum_{(j,k) \in \tilde{I}^+} k h_2 \int_0^T \left( \frac{u_{j,k-1}}{h_2} \right)^2 dt \\ &\quad - \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T \left\{ \left( \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right\} dt \\ &\quad + \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T \left\{ \left( \frac{u_{j+1,k+1} - u_{j,k+1}}{h_1} \right) \left( \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{h_1} \right) \right\} dt \\ &\quad + \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T \left\{ \left( \frac{u_{j+1,k+1} - u_{j+1,k}}{h_2} \right) \left( \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{h_2} \right) \right\} dt \\ &\quad + \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^T \left\{ h_1^2 \left( \frac{u'_{j+1,k} - u'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{u'_{j,k+1} - u'_{j,k}}{h_2} \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.5.6.** L'identité (1.5.179) est analogue - au niveau semi-discret - à la relation bien connue

$$(1.5.180) \quad TE(0) = - \int_{\Omega} u_t \left( \mathbf{x} \cdot \nabla u + \frac{u}{2} \right) \Big|_0^T dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} \left| \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right|^2 dv dt$$

où  $u$  est la solution de (1.3.15) avec  $a \equiv 0$ , relation obtenue avec les multiplicateurs  $\mathbf{x} \cdot \nabla u$  et  $u$  (voir [Kom94]). Précisément, les deux premières sommes de (1.5.179) approchent la première intégrale de (1.5.180). Les troisième et quatrième sommes approchent le terme frontière de (1.5.180). Pour obtenir cela, il convient de séparer la frontière en deux parties où  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0$  et  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$ . En raison de la condition de Dirichlet, l'approximation de  $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  au point  $(x_{1,j}, x_{2,k})$  de  $\tilde{I}^+$  est simplement  $-\frac{u_{j-1,k}}{h_1}$ . De plus,  $\tilde{I}^+ \cup \hat{I}^+$  est relié à  $\Gamma_0$  tandis que  $\tilde{I}^- \cup \hat{I}^-$  est relié à  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$ . **Cependant, (1.5.179) contient des termes (les quatre derniers) qui n'apparaissent pas au niveau continu. Les termes de viscosités ont précisément pour effet d'absorber ces termes.** ■

### 1.5.5 Convergence de la solution stabilisée

On montre la convergence de la solution (1.5.168) vers la solution (1.3.15). Les termes de viscosité agissent seulement comme des termes de régularisation pour les hautes fréquences et ne modifient pas la limite faible. En particulier, on retrouve la décroissance exponentielle du cas continu. (voir Remarque 1.5.8 ci-dessous). Il convient d'introduire quelques opérateurs : soient  $P_{h_1, h_2}$  et  $Q_{h_1, h_2}$  définis par :

$$(1.5.181) \quad P_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2} = \begin{cases} \text{la fonction continue, linéaire sur } B_{j,k} \text{ telle que} \\ P_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2}(x_{1,j}, x_{2,k}) = v_{j,k}, \\ P_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2}(x_{1,j+1}, x_{2,k}) = v_{j+1,k}, \\ P_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2}(x_{1,j}, x_{2,k+1}) = v_{j,k+1}, \\ P_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2}(x_{1,j+1}, x_{2,k+1}) = v_{j+1,k+1}, \quad j \in [0, J], k \in \mathcal{I}_j. \end{cases}$$

$$(1.5.182) \quad Q_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2} = \begin{cases} \text{la fonction définie sur} \\ \left( (j - \frac{1}{2})h_1, (j + \frac{1}{2})h_1 \right) \times \left( (k - \frac{1}{2})h_2, (k + \frac{1}{2})h_2 \right) \cap \Omega \\ \text{par } Q_{h_1, h_2} \mathbf{v}_{h_1, h_2}(\mathbf{x}) = v_{j,k}, \quad j \in [0, J], k \in \mathcal{I}_j. \end{cases}$$

**Théorème 1.5.7** (Convergence de  $\mathbf{y}_{h_1, h_2}$ ). *Soit  $\mathbf{y}_{h_1, h_2}$  la solution de (1.5.168). Si  $\mathbf{a}_{h_1, h_2}$ ,  $(\mathbf{y}_0)_{h_1, h_2}$  et  $(\mathbf{y}_1)_{h_1, h_2}$  sont tels que*

$$(1.5.183) \quad \begin{cases} E_{h_1, h_2}(0) \leq C, \quad Q_{h_1, h_2} \mathbf{a}_{h_1, h_2} \rightarrow a \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\Omega), \\ P_{h_1, h_2}(\mathbf{y}_0)_{h_1, h_2} \rightarrow \mathbf{y}_0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad Q_{h_1, h_2}(\mathbf{y}_1)_{h_1, h_2} \rightarrow \mathbf{y}_1 \text{ faiblement } * \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

alors,

$$(1.5.184) \quad \begin{cases} P_{h_1, h_2} \mathbf{y}_{h_1, h_2} \rightarrow \mathbf{y} \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \\ Q_{h_1, h_2} \frac{\partial \mathbf{y}_{h_1, h_2}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

où  $\mathbf{y}$  est solution de (1.3.15). ■

Nous renvoyons à [22] pour la preuve (utilisant notamment que  $\Omega_{h_1, h_2}$  est inclus dans  $\Omega$  pour tout  $h_1, h_2$ ) et insistons sur la remarque suivante.

**Remarque 1.5.8.** Si on suppose la convergence forte des données initiales en lieu et place de (1.5.183) alors

$$(1.5.185) \quad E_{h_1, h_2}(t) \rightarrow E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{quand } (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0).$$

Précisément, montrons que (1.5.185) est vraie si

$$(1.5.186) \quad E_{h_1, h_2}(0) \rightarrow E(0) \text{ quand } (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0).$$

Puisque  $E_{h_1, h_2}(t)$  décroît vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ , (1.5.172) implique

$$(1.5.187) \quad E_{h_1, h_2}(0) = h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^\infty a_{j,k}(y'_{j,k})^2 dt + h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^\infty \left\{ h_1^2 \left( \frac{y'_{j+1,k} - y'_{j,k}}{h_1} \right)^2 + h_2^2 \left( \frac{y'_{j+1,k} - y'_{j,k}}{h_1} \right)^2 \right\} dt.$$

Par ailleurs, si  $\Omega$  est de classe  $C^2$ ,  $E(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , soit

$$(1.5.188) \quad E(0) = \int_0^\infty \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx dt.$$

Alors, (1.5.186)-(1.5.188) entraîne que

$$(1.5.189) \quad \limsup_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^\infty a_{j,k}(y'_{j,k})^2 dt = \limsup_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \int_0^\infty \int_\Omega Q_{h_1, h_2} a_{h_1, h_2} |Q_{h_1, h_2} y'_{h_1, h_2}|^2 dx dt \\ \leq \int_0^\infty \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx dt,$$

ce qui, combiné à la convergence faible du théorème précédent entraîne

$$(1.5.190) \quad h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} a_{j,k}(y'_{j,k})^2 \rightarrow \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx \text{ fortement dans } L^2(0, \infty),$$

et ainsi

$$(1.5.191) \quad h_i P_{h_1, h_2} y'_{h_1, h_2} \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)), \quad i = 1, 2.$$

L'égalité

$$(1.5.192) \quad E(0) = E(t) + \int_0^t \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx dt, \quad \forall t > 0,$$

permet alors de conclure :

$$(1.5.193) \quad |E_{h_1, h_2}(t) - E(t)| \leq |E_{h_1, h_2}(0) - E(0)| + h_1 h_2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla P_{h_1, h_2} y'_{h_1, h_2}|^2 dx dt \\ + \left| h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} \int_0^t a_{j,k}(y'_{j,k})^2 dt - \int_0^t \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx dt \right| \\ \leq |E_{h_1, h_2}(0) - E(0)| + h_1 h_2 \int_0^\infty \int_\Omega |\nabla P_{h_1, h_2} y'_{h_1, h_2}|^2 dx dt \\ + \int_0^t \left| h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} a_{j,k}(y'_{j,k})^2 - \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx \right| dt \\ \leq |E_{h_1, h_2}(0) - E(0)| + h_1 h_2 \int_0^\infty \int_\Omega |\nabla P_{h_1, h_2} y'_{h_1, h_2}|^2 dx dt \\ + \int_0^\infty \left| h_1 h_2 \sum_{j=0}^J \sum_{k \in I_j} a_{j,k}(y'_{j,k})^2 - \int_\Omega a(\mathbf{x}) |y_t|^2 dx \right| dt.$$

■

### 1.5.6 Spectre de l'opérateur des ondes amorties discret

Examinons numériquement l'influence des termes de viscosité sur le spectre de l'opérateur d'amortissement

$$(1.5.194) \quad \mathcal{A}_h^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 & I_{h,\Omega} \\ \Delta_h & -aI_{h,\omega} + ph^2\Delta_h \end{pmatrix}$$

noté  $\sigma(\mathcal{A}_h^{(p)})$ . Au niveau continu, le taux de décroissance exponentielle vérifie l'inégalité :  $\alpha \leq -\sup\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ . On considère la géométrie de la figure 1.17-gauche. Le domaine  $\omega$ , voisinage de  $\Gamma_0$  est représenté sur la partie droite.

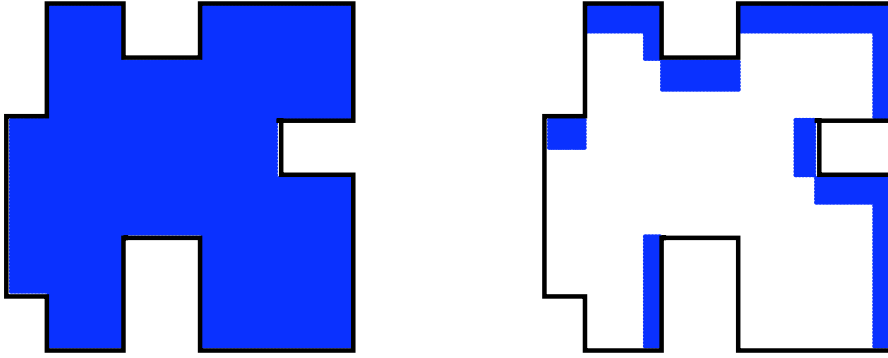


FIG. 1.17: Domaine  $\Omega \subset (0, 1)^2$  (gauche) et support  $\omega \subset \Omega$  de la fonction  $a$  (droite).

Pour  $a(x) = 10\chi_\omega(x)$  et  $h = 1/20$ , la figure 1.18 donne le spectre  $\sigma(\mathcal{A}_h^{(p)})$  pour  $p = 0$  et  $p = 1$ . Sans terme de viscosité ( $p = 0$ ), l'abscisse spectrale  $-\max\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_h^{(0)})\}$  converge vers zéro avec  $h$ . Pour  $p = 1$ , cette quantité demeure uniformément minorée (voir Tableau 1.4). Je renvoie également à [AL03] pour le calcul de spectres associés à des géométries complexes de  $\mathbb{R}^2$ .

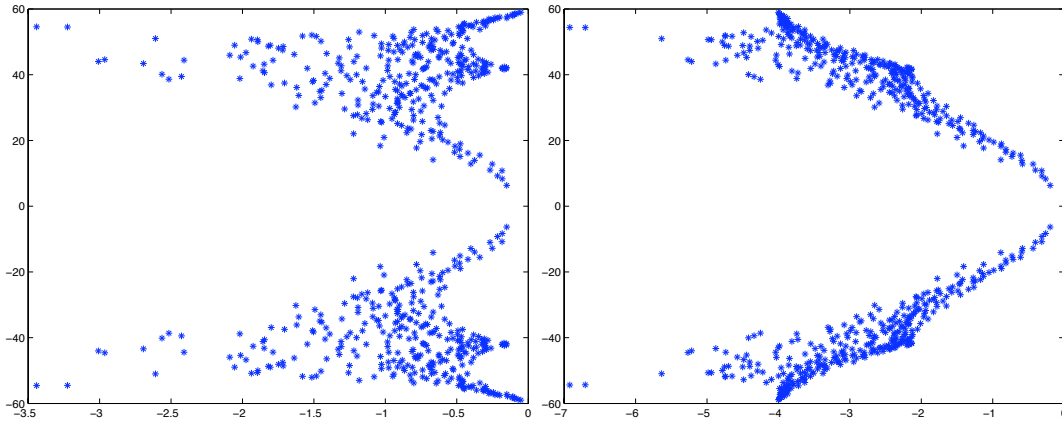


FIG. 1.18: Distribution des valeurs propres de  $\mathcal{A}_h^{(0)}$  (gauche - sans termes de viscosité) and  $\mathcal{A}_h^{(1)}$  (droite - avec termes de viscosité).

### 1.5.7 Un exemple numérique

Illustrons ce qui précède sur un exemple singulier où la position initiale est représentée par les hautes fréquences, pour lesquelles le terme  $h^2\Delta y'$  n'est pas négligeable. Pour  $\Omega = (0, 1)^2$ , on considère la donnée

	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/160$
sans viscosité	$1.53 \times 10^{-2}$	$9.34 \times 10^{-3}$	$3.12 \times 10^{-3}$	$2.3 \times 10^{-4}$
avec viscosité	$2.32 \times 10^{-1}$	$1.92 \times 10^{-1}$	$1.90 \times 10^{-1}$	$1.89 \times 10^{-1}$

TAB. 1.4:  $-\max\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_h^{(p)})\}$  sans ( $p = 0$ ) et avec ( $p = 1$ ) termes de viscosité.

continue

$$(1.5.195) \quad y^0(\mathbf{x}) = \sin(-\pi x_1 h^{-1}) \sin(-\pi x_2 h^{-1}) - \sin(\pi x_1 (1 - h^{-1})) \sin(\pi x_2 (1 - h^{-1})) \quad ; \quad y^1(\mathbf{x}) = 0$$

et  $a(\mathbf{x}) \equiv 20 X_\omega(\mathbf{x})$  avec  $\omega \equiv \{x_1 \in [0.9, 1], x_2 \in [0, 1]\} \cup \{x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0.9, 1]\}$ . Cette donnée conduit à des paquets d'ondes de vitesse de l'ordre de  $h$ . L'évolution de  $y_h(x_1, 1/2, t)$  pour  $t \in [0, 2.]$  est donnée Figure 1.19 et illustre la différence qualitative des cas avec et sans termes de viscosité numérique. Signalons que l'usage des termes de viscosité implique un surcoût de calcul important (transformant le schéma explicite usuel en un schéma implicite).

## 1.6 Stabilisation uniforme d'une arche non linéaire

Cette partie - à nouveau en collaboration avec ADEMIR FERNANDO PAZOTO (voir [23]) - concerne la stabilisation d'une arche élastique non linéaire modélisée par le système de Marguerre-Vlasov (voir [Ber55, BB87, Sed99]) posée sur  $\Omega = (0, L)$ ,

$$(1.6.196) \quad \begin{cases} \varepsilon u_{tt}^\varepsilon - h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon)_x = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ w_{tt}^\varepsilon - w_{xxt}^\varepsilon + w_{xxxx}^\varepsilon - (w_x^\varepsilon h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon))_x + k(x)h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où  $L$  désigne la longueur de l'arche et  $h$  la déformation longitudinale

$$h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) = \left( u_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 + k(x)w^\varepsilon \right).$$

Pour simplifier, les constantes physiques sont prises égales à un.  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$  et  $w^\varepsilon = w^\varepsilon(t, x)$  représentent les déplacements respectivement longitudinal et normal au point  $x \in \Omega = (0, L)$  et au temps  $t > 0$ .  $k = k(x)$  désigne la courbure, supposée petite. Enfin,  $\varepsilon$  désigne un réel positif introduit par Berger dans [Ber55] dans les modèles de plaques afin de faire le lien entre le système de Von Kármán (voir [Cia00]) pour lequel  $\varepsilon = 1$  et de Kirchhoff-Love (voir [KS97]) pour lequel  $\varepsilon = 0$ .

L'arche est fixée en  $x = 0$

$$u^\varepsilon(t, 0) = w^\varepsilon(t, 0) = w_x^\varepsilon(t, 0) = 0, \quad \forall t > 0$$

tandis que, en  $x = L$ , on impose les conditions

$$(1.6.197) \quad \begin{cases} h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon)(t, L) = -\varepsilon^\alpha u_t^\varepsilon(t, L), & t > 0, \\ (w_{xxx}^\varepsilon - w_{xxt}^\varepsilon - h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon)w_x^\varepsilon)(t, L) = w_t^\varepsilon(t, L), & t > 0, \\ w_{xx}^\varepsilon(t, L) = -w_{xt}^\varepsilon(t, L), & t > 0, \end{cases}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Enfin, les données initiales pour (1.6.196) sont

$$(1.6.198) \quad (u^\varepsilon(0, x), u_t^\varepsilon(0, x), w^\varepsilon(0, x), w_t^\varepsilon(0, x)) = (u^0, u^1, w^0, w^1), \quad 0 \leq x \leq L$$

indépendantes de  $\varepsilon$ . Alors, l'énergie associée

$$(1.6.199) \quad E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \varepsilon (u_t^\varepsilon)^2 + (w_t^\varepsilon)^2 + (w_{xx}^\varepsilon)^2 + (w_{xx}^\varepsilon)^2 + h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon)^2 \right\} dx, \quad \forall t > 0$$

vérifie (formellement) la loi de dissipation

$$(1.6.200) \quad \frac{dE_\varepsilon(t)}{dt} = -\varepsilon^\alpha (u_t^\varepsilon)^2(t, L) - (w_t^\varepsilon)^2(t, L) - (w_{xt}^\varepsilon)^2(t, L), \quad \forall t > 0.$$

On traite dans [23] les deux points suivants, selon la valeur de  $\alpha$  :

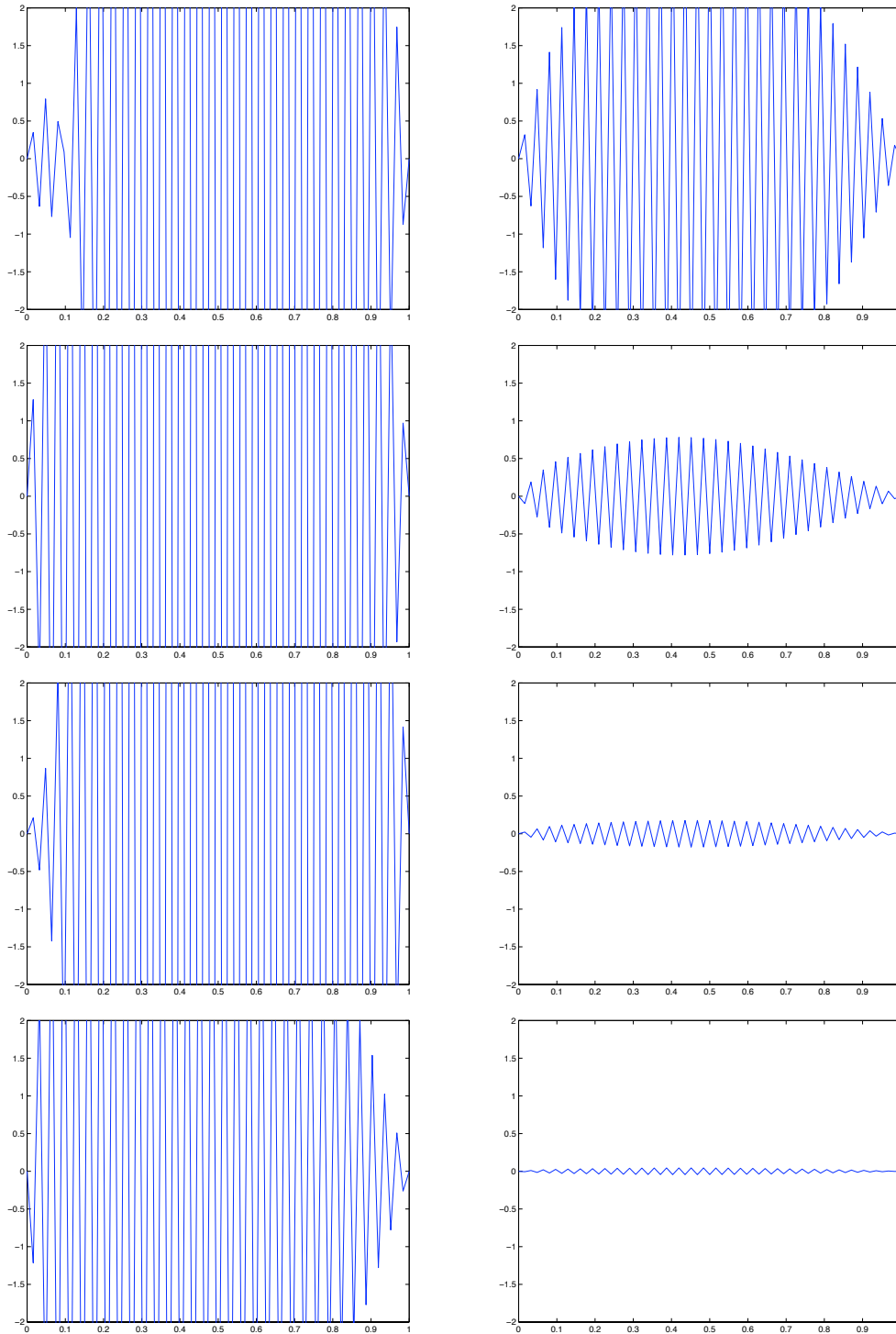


FIG. 1.19:  $y_h(x_1, 1/2, t)$  sans (gauche) et avec (droite) terme de viscosité pour  $t = 0.8, 1.2, 1.6, 2$ .



1. Stabilisation uniforme de  $E_\varepsilon$  par rapport à  $\varepsilon$  et la courbure  $k$  ;
2. Comportement de la solution  $\{u^\varepsilon, w^\varepsilon\}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zero ;

la difficulté étant liée au caractère non linéaire du système.

### 1.6.1 Existence et unicité pour le modèle de Marguerre-Vlasov

En premier lieu, on démontre pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, le caractère bien posé du système (1.6.196) dans l'espace de l'énergie. Précisément, soit l'espace de Hilbert

$$H = V \times L^2(\Omega) \times W \times V$$

avec

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}, \quad W = \{v \in H^2(\Omega) : v(0) = v_x(0) = 0\}$$

l'espace  $H$  étant muni de la norme :

$$\|(v, y, w, z)\|_H = \left( \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \varepsilon \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

On a :

**Théorème 1.6.1.** *Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k \in H^1(\Omega)$  et  $(u^0, u^1, w^0, w^1) \in H$ . Le problème (1.6.196) possède une solution globale faible unique*

$$(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon, w^\varepsilon, w_t^\varepsilon) \in C([0, +\infty); H)$$

et l'énergie  $E_\varepsilon$  satisfait (1.6.200) pour tout  $t > 0$ . ■

### 1.6.2 Décroissance exponentielle pour $E_\varepsilon$ ( $\varepsilon > 0$ positif fixe)

L'usage des multiplicateurs  $u_x, w_x^2$  et  $k(x)w$  permet alors de montrer d'abord que la fonction

$$F_\varepsilon(t) = \int_{\Omega} \left[ x(\varepsilon u_x u_t + w_x w_t) + (w_{xt}(xw_x)_x) - b(w w_t + w_x w_{xt}) - a \varepsilon u u_t \right] dx$$

est une fonction de Lyapounov puis la décroissance exponentielle de l'énergie, supposant une restriction sur la courbure de l'arche :

**Théorème 1.6.2.** *Soit  $\{u, w\}$  la solution faible de (1.6.196) donnée par le théorème 1.6.1. Si  $\alpha \in [0, 1]$  et si la courbure  $k = k(x)$  satisfait*

$$\|k\|_{\infty} + \|k_x\|_{\infty} \text{ est petit}$$

alors il existe deux constantes positives  $C$  et  $\mu$ , indépendantes de  $\varepsilon$ , telles que

$$(1.6.201) \quad E_\varepsilon(t) \leq C E_\varepsilon(0) e^{-\frac{\mu}{2+\varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0)+\|k\|_{\infty}^2)} t}, \quad \forall t > 0.$$

■

### 1.6.3 Limite singulière lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

Le comportement de la solution dépend de la valeur de  $\alpha$ . On distingue le cas  $\alpha = 0$  et le cas  $\alpha \in (0, 1]$ .

**Théorème 1.6.3.** *Soient  $(u^0, u^1, w^0, w^1) \in H$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $k \in H^1(\Omega)$ . Soit  $(u^\varepsilon, w^\varepsilon)$  la solution du système (1.6.196) du théorème 1.6.1. Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,*

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w \text{ faiblement dans } L^\infty([0, \infty); W) \cap W^{1,\infty}([0, \infty); V),$$

où  $w$  est la solution faible de

$$(1.6.202) \quad \begin{cases} w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} = 0 & t > 0, \quad x \in \Omega \\ w(t, 0) = w_x(t, 0) = 0, & t > 0 \\ (w_{xxx} - w_{xxt})(t, L) = w_t(t, L), \quad w_{xx}(t, L) = -w_{xt}(t, L), & t > 0 \\ (w(0, x), w_t(0, x)) = (w^0, w^1), & x \in \Omega. \end{cases}$$

■

**Remarque 1.6.4.** La courbure  $k = k(x)$  a disparu du modèle limite qui coïncide alors avec celui de [MPZ02] où une version 1-D du système non linéaire de von Kármán est étudié. Remarquons que cette propriété n'a pas lieu dans le cas de la stabilisation interne [MZ01]. Signalons (voir [MPZ02]) que le système (1.6.202) possède une solution unique faible globale dans  $C([0, \infty); W) \cap C^1([0, \infty); V)$ . Enfin, l'énergie associée à (1.6.202) est donnée par

$$(1.6.203) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2) dx$$

et obéit à la loi

$$\frac{dE(t)}{dt} = -w_t^2(t, L) - w_{xt}^2(t, L), \quad \forall t > 0.$$

Il est bien connu que  $E(t)$  décroît exponentiellement uniformément vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini (voir par exemple [Lag89]). En fait, en vertu du théorème 1.6.2, cette propriété est retrouvée par passage à la limite, en écrivant que

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 dx + E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(t) \leq CE(0)e^{-\frac{\mu}{2}t}, \quad \forall t > 0.$$

■

Le cas  $\alpha = 0$  conduit à un comportement plus riche.

**Théorème 1.6.5.** Soient  $(u^0, u^1, w^0, w^1) \in H$ ,  $\alpha = 0$  et  $k \in H^1(\Omega)$ . Soit  $(u^{\varepsilon}, w^{\varepsilon})$  la solution du système (1.6.196) du théorème 1.6.1. Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la solution  $w^{\varepsilon}$  converge vers  $w$  solution de

$$(1.6.204) \quad \begin{cases} \zeta_t + \frac{1}{L} \left[ \zeta + \int_{\Omega} \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx \right] = 0, & t > 0, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} - \frac{1}{L} \left[ \zeta + \int_{\Omega} \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx \right] (w_{xx} - k(x)) = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \end{cases}$$

avec condition frontière

$$\begin{cases} w(t, 0) = w_x(t, 0) = 0, \quad w_{xx}(t, L) = -w_{xt}(t, L), & t > 0, \\ \left[ w_{xxx} - w_{xxt} - \frac{1}{L} \left[ \zeta(t) + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} w_x^2 + k(x)w \right) \right] w_x \right] (t, L) = w_t(t, L), \end{cases}$$

et donnée initiale

$$(1.6.205) \quad \zeta(0) = u^0(L), \quad w(0, x) = w^0(x), \quad w_t(0, x) = w^1(x), \quad x \in \Omega.$$

■

**Remarque 1.6.6.** Contrairement au cas précédent, la courbure et la non linéarité demeurent après passage à la limite. Par ailleurs, en intégrant la première équation de (1.6.204), il vient

$$\zeta(t) = u^0(L) e^{-\frac{t}{L}} - \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{(s-t)}{L}} \int_{\Omega} \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx ds,$$

soit par substitution dans la seconde équation de (1.6.204)

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} - M(t, w, w_x)(w_{xx} - k(x)) = 0$$

avec

$$M(t, w, w_x) = \frac{1}{L} \left[ u^0(L) e^{-\frac{t}{L}} - \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{(s-t)}{L}} \int_{\Omega} \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx ds + \int_{\Omega} \left( \frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx \right].$$

Le système limite (1.6.204)-(1.6.205) peut être vu comme un modèle d'arche linéaire "pertubé" par le terme non linéaire  $M(t, w, w_x)(w_{xx} - k(x))$ . Procédant comme dans [Lag89] (voir aussi théorème 1.6.1), on montre l'existence et l'unicité de la solution faible. De plus, l'énergie est donnée par

$$(1.6.206) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2) dx + \frac{1}{2L} \left[ \zeta + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} w_x^2 + k(x)w \right) dx \right]^2,$$

et vérifie à nouveau une loi de dissipation

$$\frac{dE(t)}{dt} = -w_t^2(t, L) - w_{xt}^2(t, L) - \zeta_t^2(t), \quad \forall t > 0.$$

En fait, la décroissance exponentielle de  $E$  définie par (1.6.206) est une conséquence de la décroissance exponentielle uniforme (par rapport à  $\varepsilon$ ) de  $E_{\varepsilon}$ . L'obtention de la décroissance exponentielle par une méthode directe (i.e. sans un processus limite) semble ouverte. ■

Les cas  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 1$  sont ouverts : les expériences numériques suggèrent dans ces cas la non décroissance exponentielle uniforme vis-à-vis de  $\varepsilon$ . On se reporte au tableau 1.5.

$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \in (0, 1)$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
Non linéaire	Non linéaire	Linéaire	Linéaire	Linéaire
$\mu^{\varepsilon} \rightarrow 0$ (*)	$\mu^{\varepsilon} \geq \mu > 0$	$\mu^{\varepsilon} \geq \mu > 0$	$\mu^{\varepsilon} \geq \mu > 0$	$\mu^{\varepsilon} \rightarrow 0$ (*)
$E_{\varepsilon, w^{\varepsilon}} \rightarrow E$ (*)	$E_{\varepsilon, w^{\varepsilon}} \rightarrow E$ (*)	$E_{\varepsilon} \rightarrow E$ (*)	$E_{\varepsilon, w^{\varepsilon}} \rightarrow E$ (*)	$E_{\varepsilon, w^{\varepsilon}} \rightarrow E$ (*)

TAB. 1.5: Résumé des comportements du système (1.6.196) par rapport à  $\varepsilon$  en fonction de  $\alpha$  (le symbole \* désigne les observations numériques) -  $\mu^{\varepsilon}$  désigne le taux de décroissance exponentielle.

#### 1.6.4 Une illustration numérique dans le cas $\alpha = 0$

Donnons simplement une figure dans le cas  $\alpha = 0$ , lequel retient la non linéarité du système initial et fournit une décroissance exponentielle uniforme. Pour  $k = 1/5$ ,  $T = 2$ , la figure 1.20 décrit la quantité  $u^{\varepsilon}(\cdot, L)$  pour  $\varepsilon = 10^{-2}$  et  $\varepsilon = 10^{-3}$  ainsi que la fonction limite  $\zeta$ , solution de l'équation différentielle de (1.6.204) : on observe que

$$\frac{\|u^{\varepsilon}(\cdot, L) - \zeta\|_{L^{\infty}(0, T)}}{\|\zeta\|_{L^{\infty}(0, T)}} \approx e^{4.40} \varepsilon^{0.43}$$

en accord avec l'analyse théorique. On renvoie à [23] pour les détails et plusieurs simulations numériques.

#### 1.7 Contrôlabilité des coques élastiques minces et spectre essentiel

Je conclus ce chapitre en abordant la contrôlabilité exacte frontière des systèmes modélisant les vibrations d'une coque mince élastique. Il s'agit d'un travail en collaboration avec FARID AMMAR-KHODJA<sup>4</sup> et GIUSEPPE GEYMONAT<sup>5</sup>. On renvoie à [2] et à [30].

<sup>4</sup>Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, Besançon.

<sup>5</sup>Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil, Université de Montpellier II.

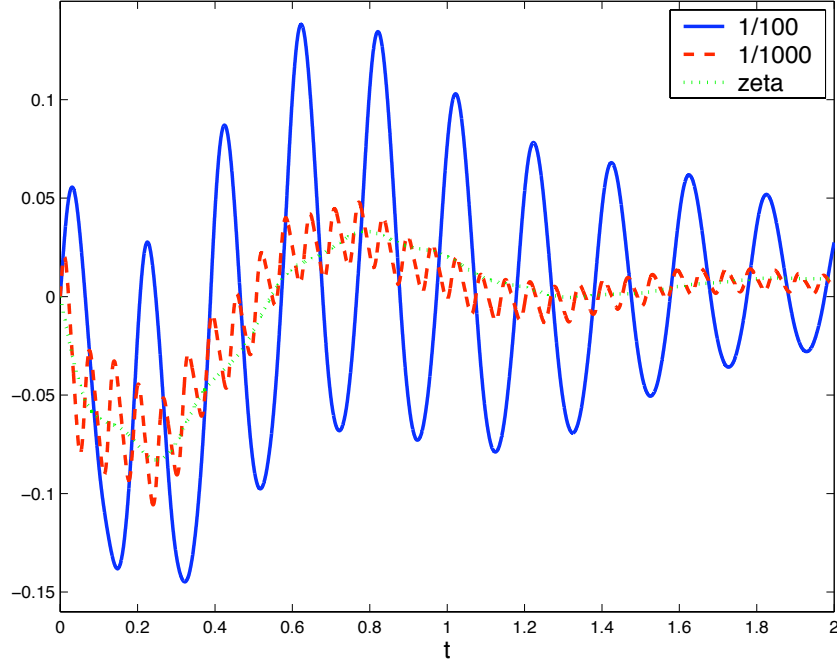


FIG. 1.20:  $T = 2, k = 1/5, \alpha = \mathbf{0}, u^\varepsilon(\cdot, L)$  pour  $\varepsilon = 10^{-2}$  (ligne pleine),  $\varepsilon = 10^{-3}$  (ligne tiretée) et la limite  $\zeta$  (ligne pointillée) vs.  $t \in [0, T]$ .

### 1.7.1 Rappels sur la modélisation des coques élastiques minces - Motivations

Je renvoie pour plus de détails aux ouvrages [CB03, Cia00, Des90b, SHSP93]. Soient  $\omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\gamma$  de classe  $C^4$ ,  $\phi$  une carte de  $C^4(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$  et  $\varepsilon > 0$ . On appelle coque la structure de surface moyenne  $\phi(\bar{\omega})$  et d'épaisseur constante  $2\varepsilon$ . On suppose que  $\phi$  est injective de telle façon que les vecteurs  $a_\alpha = \partial_\alpha \phi$ ,  $\alpha = 1, 2$  soient linéairement indépendants en tout point de  $\bar{\omega}$ . Ces vecteurs forment la base covariante du plan tangent à  $\phi(\bar{\omega})$ . Le vecteur normal unité est noté  $a_3 = |a_1 \wedge a_2| / |a_1 \wedge a_2|$  à  $\phi(\bar{\omega})$ . On attache alors à la surface deux formes fondamentales : le tenseur métrique  $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$  et le tenseur de courbure  $b_{\alpha\beta} = a_3 \cdot \partial_\alpha a_\beta$ , en composantes covariantes. On introduit également la base contravariante du plan tangent par  $a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta$  où  $a^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{-1}$  est le tenseur métrique en base contravariante. En composantes mixtes, le tenseur de courbure est  $b_\alpha^\beta = a^{\beta\sigma} b_{\sigma\alpha}$ . Les symboles de Christoffel de la surface  $\phi(\bar{\omega})$  sont définis par  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = a^\sigma \cdot \partial_\beta a_\alpha$ . Pour tout déplacement  $\mathbf{v} = v_i a^i$  de la surface moyenne, on associe le tenseur linéarisé de changement de métrique

$$(1.7.207) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{\alpha\|\beta} + v_{\beta\|\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

et le tenseur linéarisé de changement de courbure

$$(1.7.208) \quad \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \partial_\beta v_{3\|\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_{3\|\lambda} - b_\beta^\lambda v_{\lambda\|\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

où  $v_{\lambda\|\alpha} = \partial_\alpha v_\lambda - \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma v_\sigma - b_{\lambda\alpha} v_3$ ,  $v_{3\|\alpha} = \partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\beta v_\beta$ . Enfin, pour tout  $\varepsilon$  fixe, on introduit  $\Omega^\varepsilon = ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \omega$  et la carte  $\varphi : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(1.7.209) \quad \varphi(\xi) = \phi(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 a_3(\xi_1, \xi_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Le domaine  $\bar{\omega}$  est la configuration de référence de la coque. Soumise à un chargement  $\mathbf{f}$  (exprimé dans la base covariante) et encastée sur tout le bord, la surface moyenne de la coque est soumise à un déplacement

$\mathbf{u}$ , qui est solution, selon le modèle linéaire de W.T. KOITER, du système suivant :

$$(1.7.210) \quad \begin{cases} \mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{f} & \omega, \\ u_\alpha = 0, \quad \varepsilon^2 u_3 = 0, \quad \varepsilon^2 \partial_n u_3 = 0 & \gamma = \partial\omega \end{cases}$$

où  $\mathbf{A}^\varepsilon$  est un opérateur de la forme  $\mathbf{A}^\varepsilon = \mathbf{A}_M + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F$  associé à la forme bilinéaire symétrique

$$(1.7.211) \quad b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varepsilon^2 b_F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{v}) d\xi + \varepsilon^2 \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\sigma\tau}(\mathbf{v}) d\xi.$$

Les composantes contravariantes  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$  du tenseur de l'élasticité bidimensionnelle sont définies par

$$(1.7.212) \quad a^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \quad \alpha, \beta, \sigma, \tau \in \{1, 2\}$$

avec  $\lambda, \mu > 0$  les constantes de Lamé. L'opérateur membranaire  $\mathbf{A}_M$  est d'ordre 2 tandis que l'opérateur de flexion  $\mathbf{A}_F$  est d'ordre 4. Enfin, pour tout  $\mathbf{f} \in (L^2(\omega))^3$ , le système (1.7.210) est bien posé : il existe une unique solution faible  $\mathbf{u}$  dans  $H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$  (voir [BCM94] et [Cia00]). Il est important de signaler pour la suite que le modèle de KOITER est obtenu à partir du modèle de l'élasticité tridimensionnelle et d'hypothèses cinématiques *a priori*, s'appuyant sur le fait que l'épaisseur  $2\varepsilon$  est petite devant le diamètre de  $\omega$ . La méthode des développements asymptotiques permet de justifier ce type de modèle (voir notamment [SHSP93]). On prend donc  $\varepsilon \ll 1$ .

Dans le cas dynamique, on considère le système

$$(1.7.213) \quad \begin{cases} \mathbf{y}_\varepsilon'' + \mathbf{A}_M \mathbf{y}_\varepsilon + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F \mathbf{y}_\varepsilon = \mathbf{0} & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ + \text{Conditions de bord et données initiales} \end{cases}$$

modélisant les vibrations de la coque dans l'intervalle de temps  $(0, T)$ . Pour une donnée initiale  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$  dans un espace à préciser, on souhaite agir sur une partie du bord de façon à ce que  $\mathbf{y}(T, \cdot) = \mathbf{y}'(T, \cdot) = \mathbf{0}$  dans  $\omega$ .

Par rapport à la très large littérature concernant la contrôlabilité/stabilisation des plaques (voir [LL88, Lag89] et leurs références), peu de travaux concernent la contrôlabilité des modèles de coques. Pour  $\varepsilon$  positif strictement, l'opérateur auto-adjoint  $\mathbf{A}^\varepsilon$  est d'inverse compacte et la méthode des multiplicateurs permet d'obtenir un résultat de contrôlabilité. Précisément, il est montré dans [MV99], que si le temps  $T$  est suffisamment grand (dépendant de l'épaisseur et de la courbure) et si la courbure est suffisamment petite, alors il existe une fonction  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  de  $L^2((0, T) \times \partial\omega)$  agissant de la façon suivante :

$$(1.7.214) \quad y_{\varepsilon,\alpha} = v_\alpha, \quad (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0 \quad (\varepsilon^2) \partial_n y_{\varepsilon,3} = v_3, \quad (0, T) \times \partial\omega$$

qui contrôle toute donnée initiale de  $L^2(\omega)^3 \times (H^{-1}(\omega) \times H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega))$ . Lorsque la courbure est nulle, la coque dégèrène géométriquement en une plaque et les déplacements tangentiels  $(y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2})$ , solutions d'un système d'ordre deux sont découplés du déplacement normal  $y_{\varepsilon,3}$ , solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre. Dans le cas couplé, les *difficultés apparaissent* en terme de contrôlabilité exacte lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro :

– Dans ce cas, si le noyau de l'opérateur  $\mathbf{A}_M$  est réduit à zéro (la coque est dite bien inhibée selon la terminologie introduite par EVARISTE SANCHEZ-PALENCIA - voir [SHSP93]), la solution  $\mathbf{y}_\varepsilon$  tend vers  $\mathbf{y}$  solution du modèle (1.7.215)

$$(1.7.215) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'' + \mathbf{A}_M \mathbf{y} = \mathbf{0} & \text{dans } (0, T) \times \omega, \\ + \text{Condition de bord et données initiales} \end{cases}$$

faisant apparaître l'opérateur membranaire  $\mathbf{A}_M$  d'ordre deux : la composante  $y_3$  possède la régularité  $L^2(\omega)$  et non plus  $H_0^2(\omega)$  <sup>6</sup> et le contrôle Dirichlet  $v_3$  n'a donc plus de sens : à la limite en  $\varepsilon$ , il n'y a donc plus que les deux contrôles  $v_1$  et  $v_2$  pour les trois composantes  $y_1, y_2$  et  $y_3$ .

<sup>6</sup> $y_{3,\varepsilon}$  présente une couche limite près de  $\partial\omega$  de longueur de l'ordre de  $\sqrt{\varepsilon}$ .

- La seconde difficulté - liée à la précédente - est que l'opérateur  $A_M$  est un opérateur d'ordre mixte et possède un spectre essentiel ( $A_M$  s'inscrit dans le cadre de la théorie de Grubb-Geymonat, voir [GG77]). Le résultat de [GV00] montre alors que la contrôlabilité (uniformément par rapport aux données) n'est pas vraie pour le modèle limite.

Cette perte de compacité dans la transition *coque-membrane* et son impact sur les propriétés de contrôlabilité sont analysés en détail dans le cas particulier d'une héli-sphère axi-symétrique dans une série de papiers par GIUSEPPE GEYMONAT, PAOLA LORETI et VANDA VALENTE : [GLV91, GLV92, GLV93, GLV95]. Grâce à une connaissance explicite du spectre de l'opérateur  $A^\varepsilon$  dans ce cas, les auteurs obtiennent que le temps de contrôlabilité est de l'ordre de  $T \approx C/\varepsilon$ , où  $C$  désigne la courbure (constante) de l'héli-sphère. Par ailleurs, à la limite en  $\varepsilon$ , le spectre possède un point d'accumulation positif fini responsable de la perte de contrôlabilité par rapport aux données. Cela suggère alors de relaxer la notion de contrôlabilité pour ce type d'opérateur (voir notamment [GV01] et également [LV97] pour un résultat de contrôlabilité partiel). Au passage - mais nous y reviendrons - l'estimation  $T \approx C/\varepsilon$  illustre **le rôle crucial de la courbure** dans la non contrôlabilité uniforme en  $\varepsilon$  : si  $C = 0$ , le système est découplé et la contrôlabilité a lieu pour tout  $\varepsilon > 0$  !

Pour être complet relativement à la littérature, citons également [Leb07] pour la contrôlabilité d'un modèle de coque peu profonde et [LTV96, Tri96, CGY03] pour des résultats dans le cadre de la stabilisation. A la connaissance de l'auteur, tous les résultats obtenus jusqu'à présent supposent que la courbure - paramètre de couplage en les déplacements tangentiels et transverse - est suffisamment petite.

Dans la suite, on analyse la contrôlabilité exacte frontière dans le cas d'une structure cylindrique : l'objectif principal est d'identifier l'espace des données uniformément contrôlables par rapport à  $\varepsilon$ .

### 1.7.2 Contrôlabilité d'une arche cylindrique - Le cas $\varepsilon > 0$

Pour simplifier l'écriture, on note  $y$  pour  $y_\varepsilon$ . Selon [2, 29], on se place dans une situation uni-dimensionnelle avec  $\omega = (0, 1)$  et notons  $\xi \in \omega$  l'abscisse curviligne. Pour une arche cylindrique la carte  $\varphi : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  prend l'expression

$$\varphi(\xi) = \left( r \sin(r^{-1}\xi), r \cos(r^{-1}\xi) \right) = \mathbf{x} = (x_1, x_3)$$

où  $r > 0$  désigne le rayon de courbure. La courbure est alors  $c = r^{-1}$ . Les vecteurs tangent  $\boldsymbol{\tau} = \partial_\xi \varphi$  et normal  $\boldsymbol{\nu}$  sont

$$\boldsymbol{\tau} = \left( \cos(r^{-1}\xi), -\sin(r^{-1}\xi) \right), \quad \boldsymbol{\nu} = \left( \sin(r^{-1}\xi), \cos(r^{-1}\xi) \right)$$

de sorte que tout déplacement  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  de composante  $(\hat{y}_1, \hat{y}_3)$  dans la base orthonormale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \hat{y}_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \hat{y}_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3$  s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = y_1(\xi)\boldsymbol{\tau}(\xi) + y_3(\xi)\boldsymbol{\nu}(\xi), \quad \xi \in \omega$$

dans la base contravariante  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  (qui coïncide ici avec la base covariante). Les opérateurs sont

$$A_M \mathbf{y} = a \begin{pmatrix} -(y_{1,1} + r^{-1}y_3)_{,1} \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1}y_3) \end{pmatrix}$$

et

$$A_F \mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 2r^{-1}(y_{3,11} - 2r^{-1}y_{1,1} - r^{-2}y_3)_{,1} \\ y_{3,1111} - 2r^{-1}y_{1,111} - 2r^{-2}y_{3,11} + 2r^{-3}y_{1,1} + r^{-4}y_3 \end{pmatrix}.$$

$a$  désigne le coefficient d'élasticité longitudinal (égal à un dans la suite).  $y_{i,1}$  désigne la dérivée partielle de  $y_i$  par rapport à  $\xi$  :  $y_{i,1}(\xi, t) = \partial y_i(\xi, t) / \partial \xi$ ,  $i \in \{1, 3\}$ .

**Remarque 1.7.1.** Si la courbure est faible ( $r^{-1} < 1$ ), on peut simplifier l'opérateur  $A_F$  de la façon suivante :

$$A_F^* \mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 2r^{-1}(y_{3,1} - r^{-1}y_1)_{,11} \\ (y_{3,1} - r^{-1}y_1)_{,111} \end{pmatrix}.$$

Si la courbure est très faible ( $r^{-1} \ll 1$ ), on peut prendre

$$\mathbf{A}_F^{**} \mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 0 \\ y_{3,1111} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $\mathbf{A}_M$  reste inchangé (on renvoie au chapitre 4 de [Des90b]). ■

**Remarque 1.7.2.** La courbure  $r^{-1}$  est le paramètre de couplage des deux composantes  $y_1$  et  $y_3$ . Pour  $r^{-1} = 0$ , ces composantes sont solutions respectivement de

$$y_1'' - y_{1,11} = 0, \quad y_3'' + \frac{\varepsilon^2}{3} y_{3,1111} = 0, \quad (0, T) \times \omega.$$

La première équation est nulle contrôlable pour tout  $T > 1$  et  $(y_1^0, y_1^1) \in L^2(\omega) \times H^{-1}(\omega)$  via  $y_1 = v_1 \in L^2(\partial\omega \times (0, T))$  (voir [Lio88], chapitre 3). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la seconde est nulle contrôlable pour tout  $T > 0$  et  $(y_3^0, y_3^1) \in L^2(\omega) \times H^{-2}(\omega)$  via  $\partial_n y_3 = v_3 \in L^2((0, T) \times \partial\omega)$ , prenant  $y_3 = 0$  sur  $(0, T) \times \partial\omega$  (voir [Lio88], chapitre 5). ■

A nouveau, la contrôlabilité est reliée à une propriété d'observabilité pour le problème adjoint

$$(1.7.216) \quad \begin{cases} \mathbf{u}'' + \mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{dans } (0, T) \times \omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \partial_n u_3 = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\omega, \\ (\mathbf{u}(\cdot, 0), \mathbf{u}'(\cdot, 0)) = (\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

La forme bilinéaire associée à  $\mathbf{A}^\varepsilon$  est dans ce cas

$$(1.7.217) \quad b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_{1,1} + r^{-1} u_3)(v_{1,1} + r^{-1} v_3) + \varepsilon^2 (u_{3,11} - 2r^{-1} u_{1,1} - r^{-2} u_3)(v_{3,11} - 2r^{-1} v_{1,1} - r^{-2} v_3).$$

Notant  $\mathbf{V} = H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ , on rappelle, en vertu de l'inégalité de Korn sur  $\varphi(\bar{\omega})$  que la quantité

$$|\mathbf{v}|_V = \left( \int_\omega b^\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}) d\xi \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $\mathbf{V}$ . On introduit  $\mathbf{H} = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ . Cela étant, la solution  $\mathbf{u}$  de (1.7.216) bénéficie de la régularité suivante (voir [MV99], [29]) :

**Lemme 1.7.3.** Pour tout  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ , il existe une unique solution faible  $\mathbf{u} \in C(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; \mathbf{H})$  satisfaisant le problème variationnel

$$\int_\omega \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v} d\xi + \int_\omega b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\xi = 0, \quad t \in (0, T), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

De plus, l'application  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \rightarrow (\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t))$  est continue :

$$\exists C > 0 : |\mathbf{u}(t)|_V^2 + |\mathbf{u}'(t)|_H^2 \leq C \left( |\mathbf{u}^0|_V^2 + |\mathbf{u}^1|_H^2 \right), \quad t \in (0, T).$$

Enfin, on associe à  $\mathbf{u}$  l'énergie suivante :

$$E(t, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_\omega (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' + b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})) d\xi$$

constante en temps :  $E(t, \mathbf{u}) = E(t = 0, \mathbf{u}) \equiv E_0(\mathbf{u})$  pour tout  $t > 0$ .

Comme précédemment dit, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixe, la méthode des multiplicateurs conduit à l'estimation suivante :

**Théorème 1.7.4** (Inégalité d'observabilité). Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $D(\varepsilon) > 0$  et  $r^{-1} < 1/D(\varepsilon)$ . Pour tout  $T > T^*(r^{-1}, \varepsilon) = O(1/(1 - r^{-1}D(\varepsilon)))$ , il existe une constante  $C_2 = (1 - r^{-1}D(\varepsilon))$  telle que pour tout  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in V \times \mathbf{H}$ , la solution faible de (1.7.216) satisfait l'inégalité

$$\int_0^T \int_{\partial\omega} b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\sigma dt \geq C_2(r^{-1}, \varepsilon)(T - T^*)E_0(\mathbf{u}).$$

■

L'inégalité directe se démontre sans restriction sur  $T$  ni sur la courbure  $r^{-1}$ . Il résulte du théorème précédent que pour tout  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in V \times \mathbf{H}$ , si  $r^{-1} < 1/D(\varepsilon)$  et  $T > T^*$ , alors la semi-norme  $(\int_0^T \int_{\partial\omega} b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\sigma dt)^{1/2}$  est une norme sur  $V \times \mathbf{H}$ . Ce théorème permet alors d'obtenir l'existence d'un contrôle  $\mathbf{v}$  pour  $\mathbf{y}$  solution de

$$(1.7.218) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'' + A^\varepsilon \mathbf{y} = \mathbf{0}, & \text{dans } (0, T) \times \omega, \\ y_1 = v_1, y_3 = 0, \partial_\nu y_3 = v_3, & \text{sur } (0, T) \times \partial\omega, \\ (\mathbf{y}(0, \cdot), \mathbf{y}'(0, \cdot)) = (\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Soit  $V'$  l'espace dual de  $V$  défini par  $V' = H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega)$ . L'application de la méthode HUM conduit à

**Théorème 1.7.5** (Contrôlabilité exacte). Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $r > D(\varepsilon)$  et  $T > T^*$ . Pour tout  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in \mathbf{H} \times V'$ , il existe un contrôle  $\mathbf{v} = (v_1, v_3)$  avec  $v_1, \varepsilon v_3 \in L^2((0, T) \times \partial\omega)$  tel que  $E(T, \mathbf{y}) = 0$ . ■

Le contrôle HUM  $\mathbf{v} = (v_1, v_3)$  est celui qui minimise la quantité  $\|v_1 + \varepsilon^2(v_3 - 2r^{-1}v_1)\|_{L^1((0, T) \times \partial\omega)}$ . Ce contrôle est donné par  $\mathbf{v} = (\partial_n u_1, \partial_{nn}^2 u_3)$ ,  $u$  solution de (1.7.216) correspondant à la donnée initiale  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1)$  qui minimise la fonctionnelle  $\mathcal{J} : V \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.7.219) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\omega} b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\sigma dt + \int_\Omega \mathbf{y}^0 \cdot \mathbf{u}^1 dx - \langle \mathbf{y}^1, \mathbf{u}^0 \rangle_{V', V} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\omega} \left( u_{1,1}^2 + \frac{\varepsilon^2}{3} (u_{3,11} - 2r^{-1}u_{1,1})^2 \right) d\sigma dt + \int_\Omega \mathbf{y}^0 \cdot \mathbf{u}^1 d\xi - \langle \mathbf{y}^1, \mathbf{u}^0 \rangle_{V', V}. \end{aligned}$$

### Application numérique

A nouveau, la minimisation s'effectue en utilisant l'algorithme du gradient conjugué dont un point important est le choix du produit scalaire sur  $V \times \mathbf{H}$ . On utilise le produit naturel du problème

$$\left( (\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1), (\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{\mathbf{v}}^1) \right)_{V \times \mathbf{H}} = \int_\omega b^\varepsilon(\mathbf{v}^0, \tilde{\mathbf{v}}^0) d\xi + \int_\omega (v_1^1 \tilde{v}_1^1 + v_3^1 \tilde{v}_3^1) d\xi.$$

La sensibilité de l'approximation numérique sur la qualité du contrôle - mise en évidence en section 1.4 dans le cas des ondes *a priori* demeure pour ce système, au moins pour la première composante, *proche* du contrôle de l'équation des ondes lorsque la courbure  $r^{-1}$  est faible. Par ailleurs, peu d'expériences numériques sont répertoriées dans la littérature dans le cas de contrôle Neumann.

Dans la suite, on ne considère que des données initiales régulières. De plus, on cherche les contrôles à support compact en temps de la forme  $(\rho v_1, \rho v_3)$ , avec  $\rho \in C_c^1([0, T])$ , ce qui améliore la robustesse de l'approximation. Enfin, l'espace  $V$  est approché à l'aide d'un élément fini  $C^0 - C^1$  conforme

$$\mathbf{V}_h = \{(v_{1h}, v_{3h}) \in C^0(\bar{\omega}) \times C^1(\bar{\omega}), (v_{1h})_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, (v_{3h})_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \forall i = 1, \dots, J-1\}.$$

Les figures suivantes sont associées à la donnée initiale (en repère local)

$$(1.7.220) \quad \mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_3^0) = (\sin(\pi\xi), \sin^2(\pi\xi)); \quad \mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_3^1) = (0, 0), \quad \xi \in \omega = (0, 1)$$



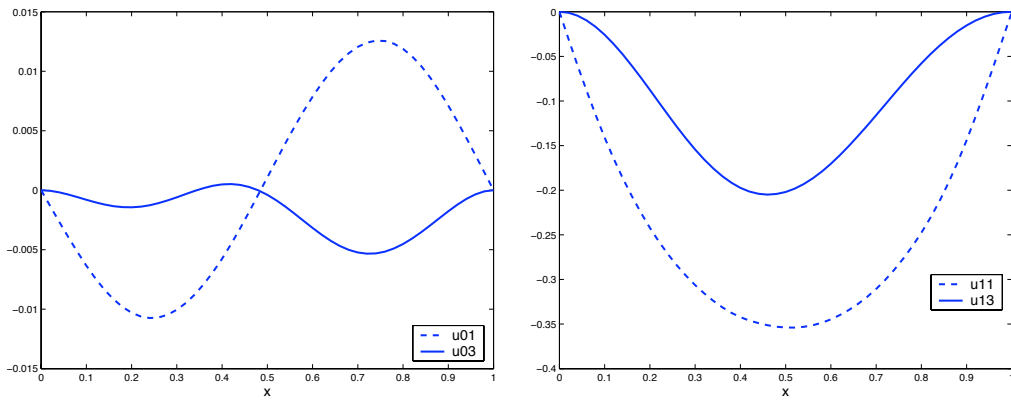


FIG. 1.21:  $T = 3$  - Condition initiale  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_3^0)$  (**gauche**) and  $\mathbf{u}^1 = (u_1^1, u_3^1)$  (**droite**) du système (1.7.216) réalisant le minimum de  $\mathcal{J}$  (voir 1.7.219).

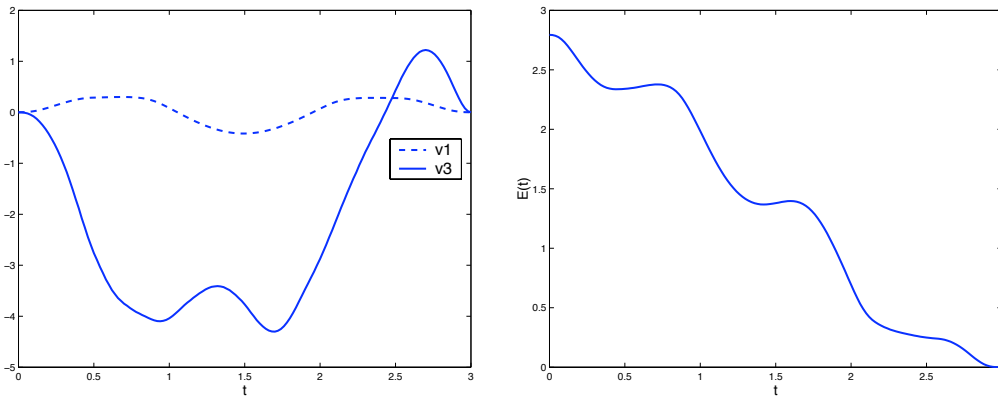


FIG. 1.22:  $T = 3$  - **Gauche** - Contrôle  $(v_1, v_3) = (\partial_n u_1, \partial_{nn}^2 u_3)$  nul en  $t = 0$  et  $t = T$  au point  $\xi = 0$  vs.  $t$ ; **Droite** - Energie  $E(t, y)$  vs.  $t$ .

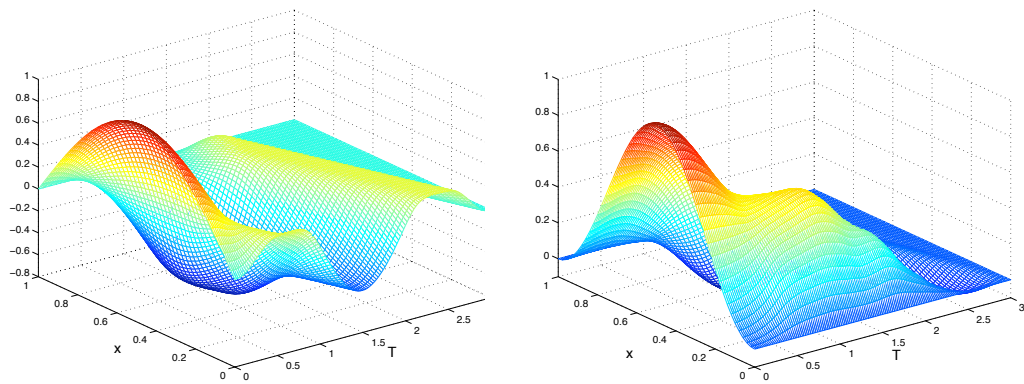


FIG. 1.23:  $T = 3$  - Evolution des composantes covariantes contrôlées  $y_1$  (**gauche**) et  $y_3$  (**droite**) sur  $(0, T) \times \omega$ .

et à  $\varepsilon = 1/10$ ,  $r^{-1} = 1/10$ ,  $T = 3$ ,  $h = 1/50$ ,  $\Delta t = h/2$ . La figure 1.21 représente les conditions initiales du problème adjoint (1.7.216), minimum dans  $\mathbf{V} \times \mathbf{H}$  de  $\mathcal{J}$  (voir 1.7.219). La figure 1.22-gauche représente l'évolution du contrôle  $\mathbf{v} = (v_1, v_3) \in L^2(\{0\} \times (0, T))$ . La figure 1.22-droite représente l'évolution non monotone de l'énergie : on obtient  $E_h(T, \mathbf{y})/E_h(0, \mathbf{y}) \approx 4.75 \times 10^{-5}$ . Enfin, la figure 1.23 représente l'évolution des composantes  $y_1$  et  $y_3$  sur  $(0, T) \times \omega$ .

L'implémentation numérique, pour ces données initiales, suggère que la convergence du contrôle, lorsque  $h$  tend vers zéro, a lieu (voir tableau 1.6). En particulier, l'algorithme du gradient conjugué converge en quelques itérations.

$h$	1/16	1/32	1/64	1/128
# Itérations	12	9	9	9
$\frac{\ y_1^0 - y_{1h}^0\ _{L^2(\Omega)}}{\ y_1^0\ _{L^2(\Omega)}}$	$3.21 \times 10^{-3}$	$6.28 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-4}$	$3.40 \times 10^{-5}$
$\ y_1^1 - y_{1h}^1\ _{H^{-1}(\Omega)}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$3.78 \times 10^{-3}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$3.87 \times 10^{-5}$
$\frac{\ y_3^0 - y_{3h}^0\ _{L^2(\Omega)}}{\ y_3^0\ _{L^2(\Omega)}}$	$2.58 \times 10^{-4}$	$5.70 \times 10^{-5}$	$3.20 \times 10^{-5}$	$3.08 \times 10^{-5}$
$\ y_3^1 - y_{3h}^1\ _{H^{-2}(\Omega)}$	$7.88 \times 10^{-5}$	$9.52 \times 10^{-6}$	$7.99 \times 10^{-7}$	$7.74 \times 10^{-7}$
$\ y_{1h}(T)\ _{L^2(\Omega)}$	$2.92 \times 10^{-3}$	$5.28 \times 10^{-4}$	$9.61 \times 10^{-5}$	$2.64 \times 10^{-5}$
$\ y_{3h}(T)\ _{L^2(\Omega)}$	$1.93 \times 10^{-3}$	$2.73 \times 10^{-4}$	$8.52 \times 10^{-5}$	$3.15 \times 10^{-5}$
$\ y'_{1h}(T)\ _{H^{-1}(\Omega)}$	$5.20 \times 10^{-3}$	$2.98 \times 10^{-3}$	$7.88 \times 10^{-4}$	$2.33 \times 10^{-4}$
$\ y'_{3h}(T)\ _{H^{-2}(\Omega)}$	$4.73 \times 10^{-4}$	$1.85 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-4}$	$5.99 \times 10^{-5}$
$\ v_{1h}\ _{L^2(\{0\} \times (0, T))}$	$4.153 \times 10^{-1}$	$4.177 \times 10^{-1}$	$4.183 \times 10^{-1}$	$4.184 \times 10^{-1}$
$\ v_{3h}\ _{L^2(\{0\} \times (0, T))}$	4.847	4.846	4.845	4.845
$\ u_{1h}^0\ _{H^1(\Omega)}$	$4.83 \times 10^{-2}$	$5.08 \times 10^{-2}$	$5.14 \times 10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-2}$
$\ u_{3h}^0\ _{H^2(\Omega)}$	$1.902 \times 10^{-1}$	$1.978 \times 10^{-1}$	$1.993 \times 10^{-1}$	$1.995 \times 10^{-1}$
$E_h(T)/E_h(0)$	$3.78 \times 10^{-3}$	$4.04 \times 10^{-4}$	$4.75 \times 10^{-5}$	$7.56 \times 10^{-6}$

Tab. 1.6: Approximation numérique vs.  $h = 1/16, 1/32, 1/64$  et  $h = 1/128 - \Delta t = h/2$ .

Le passage à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro illustre la non contrôlabilité uniforme : précisément, pour  $T$  fixe, la norme  $L^2$  du contrôle n'est pas bornée par rapport à  $\varepsilon$  (voir figure 1.24 et tableau 1.7). Le temps minimal de contrôlabilité est de l'ordre de  $1/\varepsilon$  en accord avec le calcul spectral explicite (non possible dans notre cas) présenté dans [GLV95] pour l'hémi-sphère.

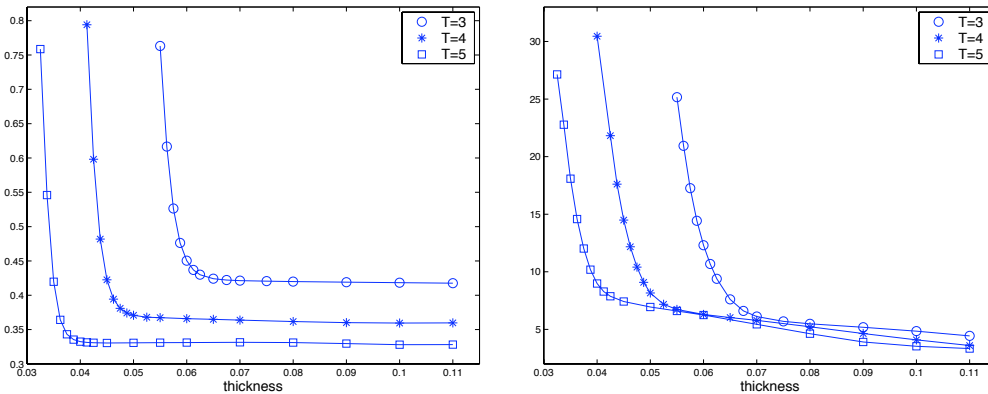


FIG. 1.24: Norme  $L^2 \|v_1\|_{L^2(\Sigma_T)}$  (gauche) et  $\|v_3\|_{L^2(\Sigma_T)}$  (droite) vs.  $\varepsilon$ .

	$\varepsilon = 1/10$	$\varepsilon = 1/20$	$\varepsilon = 1/30$	$\varepsilon = 1/40$
# itérations	8	9	16	n.c.
$\ v_{1h}\ _{L^2(\Sigma_T)}$	$2.942 \times 10^{-1}$	$2.952 \times 10^{-1}$	$3.095 \times 10^{-1}$	n.c.
$\ \varepsilon v_{3h}\ _{L^2(\Sigma_T)}$	$3.38 \times 10^{-1}$	$3.56 \times 10^{-1}$	$8.52 \times 10^{-1}$	n.c.
$\ b^\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\ _{L^1(\Sigma_T)}$	$1.24 \times 10^{-1}$	$1.295 \times 10^{-1}$	$3.37 \times 10^{-1}$	n.c.
$E_h(T)/E_h(0)$	$7.29 \times 10^{-6}$	$3.36 \times 10^{-5}$	$1.90 \times 10^{-3}$	n.c.

TAB. 1.7: Approximation du contrôle vs.  $\varepsilon - T = 3 - C = \pi/32 - \Sigma_T = (0, T) \times \partial\omega$ . n.c.= non contrôlabilité.

### 1.7.3 Contrôlabilité d'une arche cylindrique - Le cas membranaire $\varepsilon = 0$

Afin d'identifier l'espace des données uniformément contrôlables par rapport à  $\varepsilon$  pour le système précédent, nous avons analysé dans [2] le cas membranaire  $\varepsilon = 0$ . Le problème de la contrôlabilité se formule de la façon suivante : soient  $r > 0$ ,  $\omega = (0, 1)$ ; on veut déterminer les données initiales  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in \mathbf{H} \times \mathbf{V}'$ , avec dans cette section  $\mathbf{H} = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ ,  $\mathbf{V} = H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , telles que pour tout  $T > 0$  suffisamment grand il existe un contrôle  $v$  dans  $L^2(0, T)$  pour le système

$$(1.7.221) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'' + \mathbf{A}_M \mathbf{y} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ y_1(\cdot, 0) = 0, y_1(\cdot, 1) = v, & \text{dans } (0, T) \\ (\mathbf{y}(0, \cdot), \mathbf{y}'(0, \cdot)) = (\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

i.e. tel que  $\mathbf{y}(T, \xi) = \mathbf{y}'(T, \xi) = 0$  pour tout  $\xi$  de  $\omega$ .

#### Problème adjoint

A nouveau, l'analyse de la contrôlabilité requiert celle du problème adjoint

$$(1.7.222) \quad \begin{cases} \phi'' + \mathbf{A}_M \phi = \mathbf{0}, & \text{dans } (0, T) \times \omega, \\ \phi_1(\cdot, 0) = \phi_1(\cdot, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ (\phi(0, \cdot), \phi'(0, \cdot)) = (\phi^0, \phi^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Le domaine de  $\mathbf{A}_M$  est dans ce cas  $D(\mathbf{A}_M) = \{\phi \in H^1(\omega) \times L^2(\omega), \phi_1 = 0 \text{ sur } \partial\omega\}$ . En introduisant la forme bilinéaire et symétrique  $b_M(\phi, v) = (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)(v_{1,1} + r^{-1}v_3)$ , on obtient que

**Lemme 1.7.6.** Pour tout  $\phi \in \mathbf{V}$  et tout  $v \in H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , la relation suivante a lieu :

$$(1.7.223) \quad \int_{\omega} \mathbf{A}_M \phi \cdot v \, d\xi = \int_{\omega} b_M(\phi, v) \, d\xi - \int_{\partial\omega} (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3) v_1 n \, d\sigma,$$

où  $n$  désigne la normale extérieure à  $\omega$ . ■

Les résultats abstraits de [LM68] permettent alors d'obtenir le résultat suivant :

**Proposition 1.7.7.** Pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ , il existe une unique solution faible  $\phi \in C(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; \mathbf{H})$  qui satisfait le problème variationnel

$$(1.7.224) \quad \int_{\omega} \phi'' \cdot v \, d\xi + \int_{\omega} b_M(\phi, v) \, d\xi = 0, \quad \forall \phi \in \mathbf{V}.$$

De plus, l'application  $(\phi^0, \phi^1) \rightarrow (\phi(t), \phi'(t))$  est continue :

$$(1.7.225) \quad \exists C > 0; \quad |\phi(t)|_{\mathbf{V}}^2 + |\phi'(t)|_{\mathbf{H}}^2 \leq C(|\phi^0|_{\mathbf{V}}^2 + |\phi^1|_{\mathbf{H}}^2), \quad \forall t \in (0, T). \quad \blacksquare$$

Dans le cas membranaire, l'énergie associée est

$$(1.7.226) \quad E(t, \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (|\boldsymbol{\phi}'|^2 + b_M(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})) d\xi = \frac{1}{2} \int_{\omega} (|\phi_1'|^2 + |\phi_3'|^2 + (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2) d\xi, \quad \forall t \in (0, T)$$

et est constante en temps.

### Propriété spectrale

On note  $c = r^{-1}$ . Contrairement au cas  $\varepsilon > 0$ , il est possible ici d'obtenir explicitement le spectre de l'opérateur  $A_M$ . Un simple calcul donne

$$(1.7.227) \quad \sigma(A_M) = \{0, \lambda_0 = c^2, \lambda_k = c^2 + k^2\pi^2, k = 1, 2, \dots\}.$$

Puisque

$$(1.7.228) \quad \text{Ker} A_M \equiv \tilde{V}_0 = \left\{ \mathbf{v}_\zeta = (\zeta, -c^{-1}\zeta_{,1}) \in \mathbf{H}, \quad \zeta \in H_0^1(\omega) \right\}$$

et que les fonctions propres associées à  $\lambda_0 = c^2$  et  $\lambda_k = c^2 + k^2\pi^2$  sont respectivement

$$(1.7.229) \quad \mathbf{v}_0 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_k = \frac{\sqrt{2}k\pi}{\sqrt{\lambda_k}} \left( \sin(k\pi\xi), \frac{c}{k\pi} \cos(k\pi\xi) \right),$$

on déduit que 0 est l'élément du spectre essentiel de l'opérateur :  $\sigma_{ess}(A_M) = \{0\}$ . Remarquons qu'une base orthonormale (dans  $\mathbf{H}$ ) de  $\text{Ker} A_M$  est

$$\mathbf{w}_k = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\lambda_k}} \left( \sin(k\pi\xi), \frac{-k\pi}{c} \cos(k\pi\xi) \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

et que  $\{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_k\}$  est une base orthonormale dans  $\mathbf{H}$ . Il en résulte que la solution faible de

$$(1.7.230) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\phi} \in C(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; \mathbf{H}) \\ \boldsymbol{\phi}'' + A_M \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \text{ dans } (0, T), \\ (\boldsymbol{\phi}(0), \boldsymbol{\phi}'(0)) = (\boldsymbol{\phi}^0, \boldsymbol{\phi}^1). \end{cases}$$

peut être exprimée de la façon suivante, notant  $\mu_0 = r^{-1}$  and  $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$

$$(1.7.231) \quad \boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k t) \mathbf{w}_k + (A_0 \cos(\mu_0 t) + B_0 \sin(\mu_0 t)) \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\mu_k t) + B_k \sin(\mu_k t)) \mathbf{v}_k$$

où les coefficients  $a_k, b_k, A_0, B_0, A_k, B_k$  sont déterminés à partir du développement des données initiales :

$$(1.7.232) \quad \boldsymbol{\phi}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{w}_k + A_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathbf{v}_k \text{ et } \boldsymbol{\phi}^1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathbf{w}_k + \mu_0 B_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k B_k \mathbf{v}_k.$$

Enfin, l'hypothèse  $(\boldsymbol{\phi}^0, \boldsymbol{\phi}^1) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  entraîne que

$$(1.7.233) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + A_k^2) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (ca_k + k\pi A_k)^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^2 + \lambda_k B_k^2) < \infty$$

On observe que si  $\boldsymbol{\phi}^0, \boldsymbol{\phi}^1 \in \text{Ker} A_M$  alors  $\boldsymbol{\phi}(t) \in \text{Ker} A_M$  pour tout  $t$ . De façon similaire, si  $\boldsymbol{\phi}^0 \in \text{Ker} A_M$  et  $\boldsymbol{\phi}^1 = (0, 0)$ , alors  $\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}^0$  pour tout  $t > 0$ . Cela conduit à introduire l'orthogonal du sous-espace  $\text{Ker} A_M$  dans  $\mathbf{H}$  :

$$(1.7.234) \quad \mathbf{H}_c^\perp = \left\{ \mathbf{v} = (c^{-1}\psi_{,1}, -\psi) \in \mathbf{H}, \quad \psi \in H^1(\omega) \right\}.$$

Ce sous-espace est engendré par  $v_0$  et  $v_k, k \geq 1$ . On dénote également  $V_c^\perp$  l'orthogonal dans  $V$  du noyau, à nouveau engendré dans  $V$  par  $v_0$  et  $v_k, k \geq 1$ .

Remarquons que l'énergie

$$(1.7.235) \quad E(t, \phi) = \frac{1}{2} \left\{ \|\phi'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_{\omega} b_c(\phi, \phi) d\xi \right\} = E(0, \phi) = \frac{1}{2} \left\{ \|\phi^1\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_{\omega} b_c(\phi^0, \phi^0) d\xi \right\} \quad \forall t \in (0, T)$$

définit une norme sur  $V_c^\perp \times H_c^\perp$ . De plus, si  $(\phi^0, \phi^1) \in V_c^\perp \times H_c^\perp$  alors  $\phi(t) \in V_c^\perp$  pour tout  $t$ .

**Remarque 1.7.8.** Si on rajoute à la première équation du système le terme  $\alpha y_1$  pour tout  $\alpha > 0$ , 0 reste l'élément du spectre essentiel, mais comme point d'accumulation par la droite. Si on rajoute  $\beta y_3$  à la seconde équation, pour tout  $\beta > 0$ , le spectre essentiel est  $\{\beta\}$  comme point d'accumulation par la gauche, la seconde suite de valeurs propres divergeant vers  $+\infty$ . On se retrouve alors dans la situation de l'hémi-sphère de [GLV95]. ■

### Observabilité

Puisque le contrôle est actif en  $\xi = 1$ , la propriété de contrôlabilité du système (1.7.221) est reliée à l'existence de deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que, pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$  et  $T > 0$  suffisamment grand, la solution de (1.7.230) satisfait :

$$(1.7.236) \quad C_1 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{V \times H}^2 \leq \int_0^T b_M(\phi, \phi)(1, t) dt \leq C_2 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{V \times H}^2.$$

Puisque  $0 \in \sigma(A_M)$ , l'inégalité de gauche (l'inégalité d'observabilité) ne peut avoir lieu pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$ . Il suffit de prendre  $\phi^0, \phi^1 \in \text{Ker} A_M$  entraînant  $\phi(t) \in \text{Ker} A_M$  et  $b_M(\phi, \phi) = 0$  pour tout  $t$ .

On obtient le résultat suivant :

**Proposition 1.7.9.** Soient  $c > 0$  et  $\gamma^*(c) = \min(2c, \sqrt{c^2 + \pi^2} - c)$ . Pour tout temps  $T > T^*(c) \equiv 2\pi/\gamma^*(c)$ , il existe deux constantes strictement positives  $C_1(c)$  et  $C_2(c)$  telles que (1.7.236) ait lieu pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in V_c^\perp \times H_c^\perp$ . ■

*Preuve* - Pour  $(\phi^0, \phi^1) \in V_c^\perp \times H_c^\perp$  (1.7.236) est équivalente à

$$(1.7.237) \quad C_1(c) E(0, \phi) \leq \int_0^T (\phi_{1,1}(1, t) + c\phi_3(1, t))^2 dt \leq C_2(c) E(0, \phi), \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in V_c^\perp \times H_c^\perp.$$

De façon usuelle dans ce contexte, ces inégalités sont obtenues par une application directe du théorème d'Ingham (voir par exemple [KL04] page 59). Un premier calcul conduit à

$$(1.7.238) \quad E(0, \phi) = \frac{c^2}{2} (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (A_k^2 + B_k^2).$$

D'un autre coté, on a :

$$(1.7.239) \quad \begin{aligned} \phi_{1,1}(1, t) + c\phi_3(1, t) &= c(A_0 \cos(\mu_0 t) + B_0 \sin(\mu_0 t)) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mu_k^2 (A_k \cos(\mu_k t) + B_k \sin(\mu_k t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mu_k^2 (A_k + iB_k) e^{-i\mu_k t} + \frac{c}{2} (A_0 + iB_0) e^{-i\mu_0 t} \\ &\quad + \frac{c}{2} (A_0 - iB_0) e^{i\mu_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mu_k^2 (A_k - iB_k) e^{i\mu_k t}. \end{aligned}$$

On applique le théorème d'Ingham sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  pour la suite  $w = (\dots, -\mu_2, -\mu_1, -\mu_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$  et on obtient l'existence de deux constantes positives  $C_1(c)$  et  $C_2(c)$  telles que (1.7.237) a lieu pour tout  $c > 0$  sous la condition  $T > 2\pi/\gamma$  avec  $\gamma = \min(\mu_0 - (-\mu_0), \inf_{k \in \mathbb{N}} |\mu_k - \mu_{k-1}|)$ . De la concavité de la fonction racine carrée, on déduit que  $|\mu_1 - \mu_0| \leq |\mu_{k+1} - \mu_k|$  pour tout  $k \geq 0$  puis que  $\gamma = \gamma^*(c)$ . ■

La borne inférieure  $T^*$  du temps d'observabilité est atteinte pour  $c = \pi^2/8$  menant à  $T^* = 8/\pi$ . La figure 1.25 représente l'évolution de  $T^*$  en fonction de  $c = r^{-1}$ . On observe que le temps minimal explose lorsque la courbure tend vers zéro. Cela est dû à la valeur propre  $\lambda_0$  qui s'annule avec  $c$  : si la condition initiale est  $(\phi^0, \phi^1) = (v_0, \mu_0 v_0)$  telle que  $\phi_{1,1}(1, t) + c\phi_3(1, t) = c(\cos(\mu_0 t) + \sin(\mu_0 t))$ , alors on obtient explicitement que la constante  $C_1(c)$  tend vers zéro avec  $c$ , à moins que  $T = O(c^{-1})$  : l'observabilité de la proposition précédente n'est pas uniforme par rapport à la courbure.

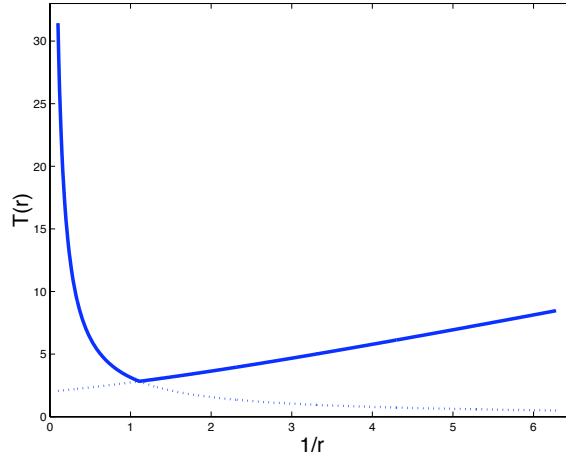


FIG. 1.25: Borne inférieure  $T^*$  du temps de contrôlabilité  $T$  en fonction de la courbure  $c = r^{-1}$ .

Si on désigne par  $\mathbf{H}_K$  (resp.  $\mathbf{V}_K$ ) le sous-espace fermé de  $\mathbf{H}$  (resp.  $\mathbf{V}$ ) généré par  $v_k$  pour tout  $k \geq 1$ , nous avons le résultat suivant :

**Proposition 1.7.10.** [Observabilité uniforme par rapport à  $c$ ] Soient  $c > 0$  et  $\gamma^{**}(c) = \sqrt{c^2 + 4\pi^2} - \sqrt{c^2 + \pi^2}$ . Pour tout  $T > T^{**}(c) \equiv 2\pi/\gamma^{**}(c)$ , il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $c$  telles que (1.7.236) ait lieu pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{V}_K \times \mathbf{H}_K$ . ■

La borne inférieure  $T^{**}$  est monotone croissante par rapport à  $c$  telle que  $\lim_{c \rightarrow 0} T^{**}(c) = 2$ , borne inférieure pour l'équation des ondes contrôlées à une extrémité. Nous remarquons également que  $T^{**}(c) < T^*(c)$  pour tout  $c > 0$ .

### Contrôlabilité exacte

On applique maintenant la méthode HUM de J-L. LIONS ([Lio88]). Soit  $\mathbf{V}' = H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$  et on a la situation usuelle  $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \approx (\mathbf{H})' \subset \mathbf{V}'$ , avec  $\mathbf{H}$  pour espace pivot. Supposons que  $(y^0, y^1) \in \mathbf{H} \times \mathbf{V}'$ . Formellement, quelques intégrations par parties conduisent à la caractérisation du contrôle  $v$  suivante :

$$(1.7.240) \quad \int_0^T (\phi_{1,1} + c\phi_3)(1, t)v(t)dt = \langle (\phi^0, \phi^1), (y^1, -y^0) \rangle_{\mathbf{V} \times \mathbf{H}, \mathbf{V}' \times \mathbf{H}} .$$

pour tout  $\phi$  solution de (1.7.230). On introduit ensuite la fonctionnelle continue et convexe  $\mathcal{J}_c : \mathbf{V} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(1.7.241) \quad \mathcal{J}_c(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T (\phi_{1,1} + c\phi_3)^2(1, t)dt - \langle (\phi^0, \phi^1), (y^1, -y^0) \rangle_{\mathbf{V} \times \mathbf{H}, \mathbf{V}' \times \mathbf{H}} .$$

Si  $\mathcal{J}_c$  est coercive, alors  $\mathcal{J}_c$  admet un unique minimum et le contrôle HUM (de norme  $L^2$ -minimale) est donné par  $v_c = (\phi_{1,1} + c\phi_3)(1, \cdot)$ . Compte tenu de ce qui précède, la fonctionnelle  $\mathcal{J}_c$  est coercive seulement sur  $V_c^\perp \times H_c^\perp$  (avec  $T$  suffisamment grand). De plus, si  $\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1$  appartiennent au noyau de l'opérateur  $\mathbf{A}_M$ , alors  $\langle (\phi^0, \phi^1), (\mathbf{y}^1, -\mathbf{y}^0) \rangle_{V \times H, V' \times H} = 0$  pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in V_c^\perp \times H_c^\perp$ . De la caractérisation (1.7.240), le contrôle est alors identiquement nul ; dans ce cas, la solution  $\mathbf{y}$  reste dans  $\text{Ker} \mathbf{A}_M$  pour tout  $t > 0$  mais n'est pas contrôlée ! On prend alors  $\mathbf{y}^0$  dans  $H_c^\perp$  et  $\mathbf{y}^1$  dans  $V_{c,\perp}'$ , sous-espace de  $V'$  défini comme l'orthogonal de  $\text{Ker} \mathbf{A}_M$  dans la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V, V'}$ . Remarquons que cet espace est la fermeture de  $V_c^\perp$  dans  $V'$ .

On a alors :

**Théorème 1.7.11.** *Soit  $c > 0$ . Pour tout  $T > T^*(c)$  et donnée initiale  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in H_c^\perp \times V_{c,\perp}'$ , il existe une fonction contrôle  $v \in L^2(0, T)$  qui conduit à l'instant  $T$  à zéro la solution  $\mathbf{y}$  de (1.7.221) associée à  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$ . De plus, le contrôle de norme  $L^2$ -minimale est donné par  $v = (\phi_{1,1} + c\phi_3)(1, \cdot)$  où  $\phi$  est solution de (1.7.230) avec  $(\phi^0, \phi^1)$  minimum de  $\mathcal{J}_c$  défini par (1.7.241) sur  $V_c^\perp \times H_c^\perp$ . ■*

De la proposition 1.7.10, on a le résultat suivant, notant  $\widetilde{V}_K$  la fermeture de  $V_K$  dans  $V'$  :

**Théorème 1.7.12** (Contrôlabilité uniforme par rapport à  $c$ ). *Soit  $c > 0$ . Pour tout  $T > T^{**}(c)$  et donnée initiale  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in H_K \times \widetilde{V}_K$ , il existe une fonction contrôle  $v \in L^2(0, T)$  qui conduit à zéro au temps  $T$  la solution  $\mathbf{y}$  de (1.7.221) associée à  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$ . De plus, le contrôle de norme  $L^2$ -minimale est donné par  $v = (\phi_{1,1} + c\phi_3)(1, \cdot)$  où  $\phi$  est solution de (1.7.230) avec  $(\phi^0, \phi^1)$  minimum de  $\mathcal{J}_c$  défini par (1.7.241) sur  $V_K \times H_K$ . Enfin, ce contrôle converge faiblement dans  $L^2(0, T)$  lorsque  $c$  tend vers zéro vers le contrôle de norme  $L^2$ -minimale qui conduit à zéro la solution de l'équation des ondes associée à la donnée  $(y_1^0, y_1^1)$ . ■*

On renvoie à [2, 30] pour les remarques suivantes :

**Remarque 1.7.13.** – Dans l'orthogonal du noyau, les composantes  $y_1$  et  $y_3$  vérifient la relation  $cy_1 + y_{3,1} = 0$ , ce qui explique *en substance* pourquoi un seul contrôle suffit pour ces deux composantes.  
– Des conclusions similaires ont lieu dans le cas d'un contrôle Neumann lorsque l'on agit sur la quantité  $y_{1,1} + cy_3$ , qui représente la déformation longitudinale. En particulier, le spectre essentiel étant indépendant des conditions aux limites, on a à nouveau  $0 \in \sigma_{ess}(\mathbf{A}_M)$ .  
– L'espace des données contrôlables  $H_c^\perp \times V_{c,\perp}'$  est engendré par les fonctions propres associées à la suite de valeurs propres  $\lambda_k$  dont les éléments vérifient la propriété de séparation :

$$(1.7.242) \quad \exists d^* > 0 \quad \text{t.q.} \quad \text{dist}(\{\lambda_k\}_{k>0}, \sigma_{ess}(\mathbf{A}_M)) = d^* \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

■

## Illustrations numériques

La minimisation numérique de la fonctionnelle  $\mathcal{J}_c$  est rendue à la fois possible et robuste grâce à la connaissance explicite du spectre de l'opérateur  $\mathbf{A}_M$  : à chaque itération  $k$  de l'algorithme du gradient conjugué, on projette l'itéré  $(\phi_k^0 \times \phi_k^1)$  sur  $V_c^\perp \times H_c^\perp$ . Sans cette projection, l'algorithme diverge, même lorsque  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$  est dans  $H_c^\perp \times V_{c,\perp}'$ .

Prenons arbitrairement la donnée

$$(1.7.243) \quad \mathbf{y}^0(\xi) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\pi\xi) \\ \frac{r^{-1}}{\pi} \cos(\pi\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^1(\xi) = \alpha\mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} \sin(2\pi\xi) \\ \frac{r^{-1}}{2\pi} \cos(2\pi\xi) \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha \in \{0, 1\}$ , engendrée par  $\mathbf{v}_0$  (si  $\alpha = 1$ ),  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ .

Le contrôle obtenu avec  $\alpha = 1$ ,  $r = \pi/5$  et  $T = 3.5 > T^*(r) \approx 3.2552$  est donné sur la figure 1.26-gauche. A nouveau, on introduit une fonction  $\rho$  à support compact afin que  $v(0) = v(T) = v'(0) = v'(T) = 0$ .

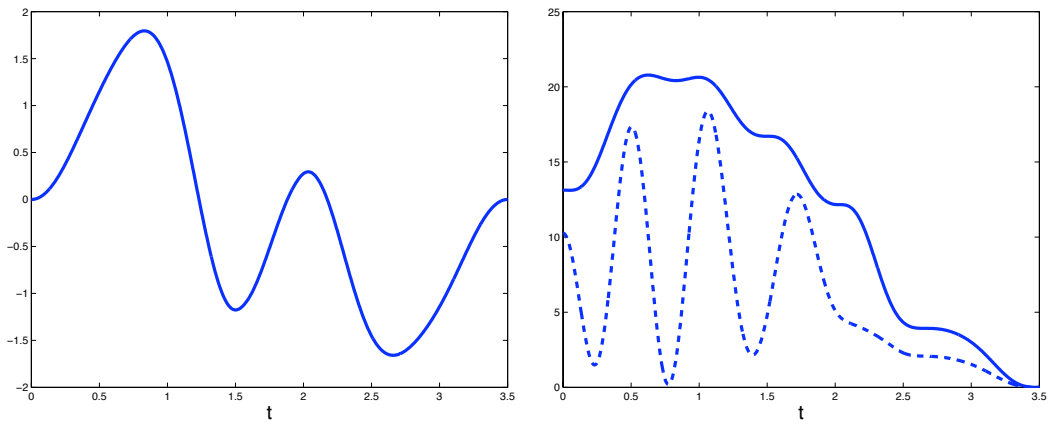


FIG. 1.26: **Gauche** : contrôle  $v(t)$  vs.  $t \in (0, T)$ ; **Droite** : Energie (ligne pleine) et énergie cinétique (ligne tirée) vs.  $t \in (0, T)$ .

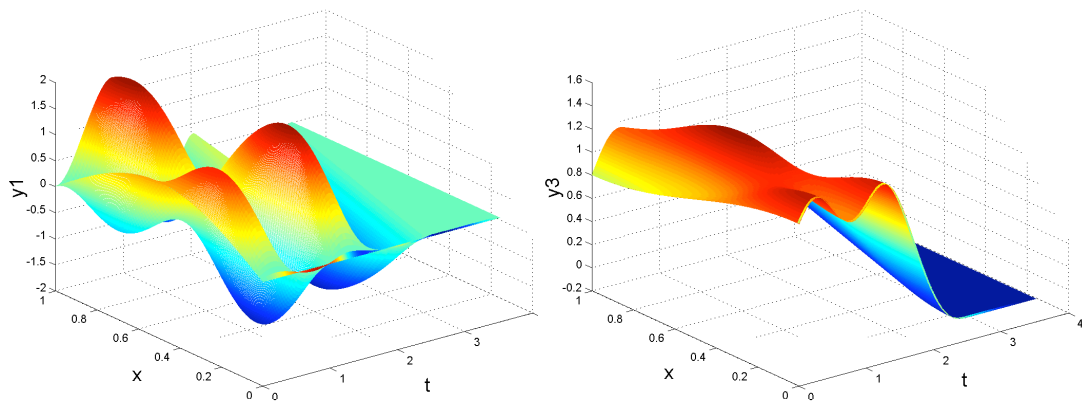


FIG. 1.27: Solution contrôlée  $y = (y_1, y_3)$  sur  $(0, T) \times \omega$ .

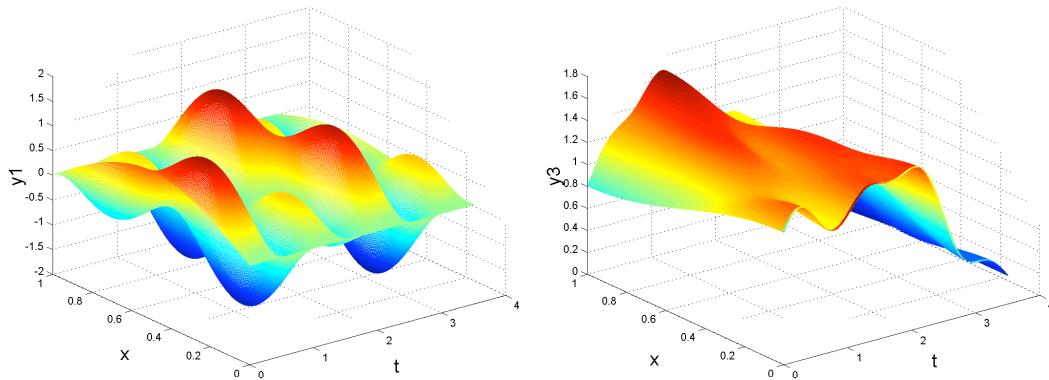


FIG. 1.28: Solution libre  $y = (y_1, y_3)$  sur  $(0, T) \times \omega$ .



L'énergie correspondante est donnée Figure 1.26-droite. Les solutions contrôlées et non contrôlées sont respectivement données sur les figures 1.27 et 1.28. Enfin, l'évolution de l'arche dans le repère cartésien  $(O, x_1, x_3)$  est décrite Figure 1.29.

Analysons le comportement du contrôle en fonction de la courbure  $c = r^{-1}$ . Pour  $\alpha = 1$ , le tableau 1.8 donne quelques valeurs de la norme  $L^2$  de  $v$  et comme attendu suggère que cette quantité n'est pas uniformément bornée par rapport à  $r^{-1}$ . De façon équivalente, le rapport  $\|v\|_{L^2(0,T)}^2 / \|(\phi^0, \phi^1)\|_{V \times H}^2$  de l'ordre de  $O(r^2)$  indique que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_c$  n'est pas uniformément coercive.

	$r^{-1} = \pi$	$r^{-1} = \pi/4$	$r^{-1} = \pi/16$	$r^{-1} = \pi/64$	$r^{-1} = \pi/256$
# Itérations	8	8	9	7	8
$\ v\ _{L^2(0,T)}$	1.415	1.601	4.823	15.791	59.220
$E(0)/E(T)$	$2.51 \times 10^{-5}$	$4.47 \times 10^{-7}$	$3.12 \times 10^{-6}$	$3.26 \times 10^{-5}$	$4.49 \times 10^{-4}$
$\frac{\ v\ _{L^2(0,T)}^2}{\ (\phi^0, \phi^1)\ _{V \times H}^2}$	$5.33 \times 10^{-1}$	$7.95 \times 10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-3}$	$9.86 \times 10^{-5}$	$6.1804 \times 10^{-6}$

TAB. 1.8:  $\alpha = 1$  - Norme  $L^2$  du contrôle vs.  $r^{-1}$ .

Lorsque les constantes sont éliminées de  $y_3^0$  et  $y_3^1$  (c'est-à-dire  $\alpha = 0$  dans (1.7.243)), on observe un comportement uniforme, en accord avec l'analyse (voir Tableau 1.9). De plus, on vérifie la convergence de  $v$  vers le contrôle  $v_{r=\infty}$  associé à l'équation des ondes (voir Tableau 1.10).

	$r^{-1} = \pi$	$r^{-1} = \pi/4$	$r^{-1} = \pi/16$	$r^{-1} = \pi/64$	$r^{-1} = \pi/256$
# Itérations	5	4	4	4	4
$\ v\ _{L^2(0,T)}$	0.823	0.692	0.679	0.678	0.678
$E(0)/E(T)$	$1.12 \times 10^{-6}$	$8.47 \times 10^{-8}$	$4.28 \times 10^{-6}$	$2.83 \times 10^{-7}$	$1.05 \times 10^{-7}$
$\frac{\ v\ _{L^2(0,T)}^2}{\ (\phi^0, \phi^1)\ _{V \times H}^2}$	2.019	1.565	1.515	1.5126	1.5124

TAB. 1.9:  $\alpha = 0$  - Norme  $L^2$  du contrôle vs.  $r^{-1}$ .

	$r^{-1} = \pi$	$r^{-1} = \pi/4$	$r^{-1} = \pi/16$	$r^{-1} = \pi/64$	$r^{-1} = \pi/256$
$\frac{\ v - v_{r=\infty}\ _{L^2(0,T)}}{\ v_{r=\infty}\ _{L^2(0,T)}}$	1.679	$1.24 \times 10^{-1}$	$7.87 \times 10^{-3}$	$5.77 \times 10^{-4}$	$4.28 \times 10^{-5}$

TAB. 1.10:  $\alpha = 0$  - Evolution de  $\|v - v_{r=\infty}\|_{L^2(0,T)}$  vs.  $r^{-1}$  -  $\|v - v_{r=\infty}\|_{L^2(0,T)} / \|v_{r=\infty}\|_{L^2(0,T)} \approx O(r^{-2})$ .

**Remarque 1.7.14.** Cette analyse suggère que si les données initiales du système en  $\varepsilon$  (1.7.218) n'ont pas de composante dans le noyau  $\text{Ker} \mathbf{A}_M$ , alors ce système est uniformément contrôlable par rapport  $\varepsilon$ . Remarquons que les données (1.7.220) n'ont pas cette propriété. Je renvoie à [29]. Je mentionne également [AZ08] dans un contexte similaire. ■

**Remarque 1.7.15.** La situation bi-dimensionnelle (actuellement étudiée dans [30]) d'une coque cylindrique est différente et plus délicate. A nouveau, l'opérateur  $\mathbf{A}_M$  est d'ordre mixte et rentre dans le cadre de [GG77]. Le spectre essentiel est un intervalle contenant 0 de la forme  $[0, ac^2]$ ,  $a > 0$ , et implique la non contrôlabilité uniforme en vertu de [GV00]. Les modes non contrôlables associés à  $\sigma_{ess}(\mathbf{A}_M)$  sont qualifiés de *modes de résonance* dans [PSP95]. De plus, le noyau de l'opérateur est réduit à  $\{0\}$  : le cylindre, *coque membranaire généralisée* selon le chapitre 4 de [Cia00], est *inhibé* selon [SHSP93]. ■

## 1.8 Et aussi ... la contrôlabilité non linéaire d'une corde soumise à un obstacle

Parmi les travaux effectués mais non abordés dans ce mémoire, je mentionne la référence [13] en collaboration avec BERNADETTE MIARA<sup>7</sup> analysant la contrôlabilité exacte frontière d'un système piezo-électrique.

<sup>7</sup>Laboratoire de modélisation et simulation numérique, École Supérieure d'Ingénieurs en Électronique et Électrotechnique, Noisy-Le-Grand.

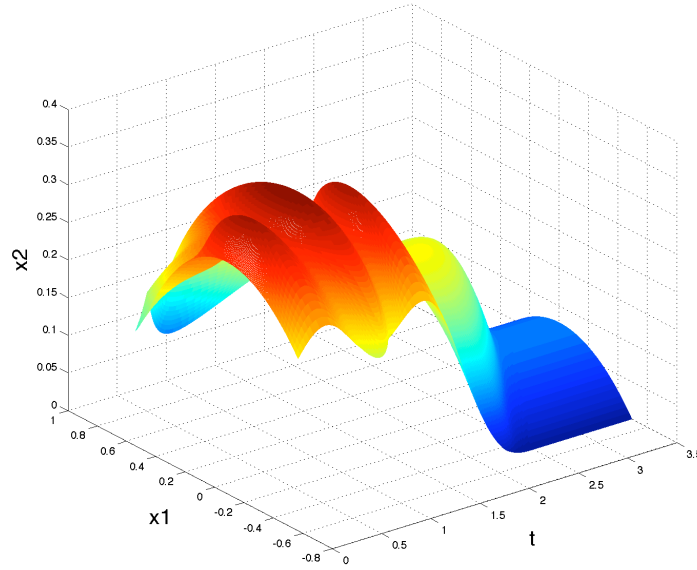


FIG. 1.29: Evolution dans le plan  $(O, x_1, x_2)$  de l'arche contrôlée en fonction du temps  $t \in (0, T)$ .

Je mentionne, également, en collaboration avec DOMINIQUE CHAPELLE<sup>8</sup> et CRISTINEL MARDARE<sup>9</sup>, la référence [5] qui introduit et justifie un modèle de coque incompressible élastique en étudiant successivement la limite du modèle de l'élasticité tridimensionnelle lorsque l'épaisseur  $2\epsilon$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  tendent respectivement vers 0 et  $1/2$ .

Enfin, très récemment, la nulle contrôlabilité d'une corde soumise à un obstacle à une extrémité a été étudiée dans [32] avec F. AMMAR-KHODJA et S. MICU. Le déplacement normal  $y$  de la corde est modélisé par l'équation des ondes sur  $(0, T) \times (0, 1)$  tandis que l'obstacle du type  $y(1, t) \geq -l$  en  $x = 1$  est modélisé par les conditions de Signorini :

$$(1.8.244) \quad y(t, 1) \geq -l, \quad y_x(t, 1) \geq 0, \quad (y(t, 1) + l)y_x(t, 1) = 0, \quad t \in (0, T)$$

où  $l$  est un réel positif. Le contrôle Dirichlet agit en  $x = 0$  :  $y(t, 0) = u(t)$  pour tout  $t \in (0, T)$ . La contrôlabilité est étudiée par une méthode de pénalisation et revient à obtenir l'existence d'un contrôle  $u_\epsilon$  - uniformément borné en  $\epsilon$  - tel que la solution du système

$$(1.8.245) \quad \begin{cases} y_\epsilon'' - y_{\epsilon,xx} = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ y_\epsilon(t, 0) = u_\epsilon(t) & t \in (0, T), \\ y_{\epsilon,x}(t, 1) = \epsilon^{-1}[y_\epsilon(t, 1) + l]^- & t \in (0, T), \\ y_\epsilon(0, x) = y^0(x), \quad y_\epsilon'(0, x) = y^1(x) & x \in (0, 1) \end{cases}$$

vérifie  $y_\epsilon(T, \cdot) = y_\epsilon'(T, \cdot) = 0$  pour tout  $\epsilon$  positif.  $(y_\epsilon(t, 1) + l)^-$  désigne pour tout  $t$  la partie négative de  $y_\epsilon(t, 1) + l$  :  $(y_\epsilon(t, 1) + l)^- = \max(0, -[y_\epsilon(t, 1) + l])$ ,  $t \in (0, T)$ . Introduisant les espaces

$$(1.8.246) \quad H_c^1 = \{z \in H^1(0, 1) : z(0) = 0\}, \quad G = \{z \in H_c^1 : z(1) \geq -l\}$$

<sup>8</sup>Projet Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures, INRIA Rocquencourt.

<sup>9</sup>Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VI.

nous montrons dans [32] que pour tout  $(y^0, y^1) \in H_c^1 \cap L^2(0, 1)$  et  $u_\epsilon \in L^2(0, T)$ , il existe une unique solution faible de (1.8.245) telle que  $y_\epsilon \in C^1([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C([0, T]; H^1(0, 1))$ . La méthode des caractéristiques et un argument de point fixe permettent alors d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 1.8.1.** *Soient  $T > 2$  et  $(y^0, y^1) \in G \times L^2(0, 1)$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u_\epsilon \in H_0^1(0, T)$  tel que la solution  $y_\epsilon$  vérifie  $y_\epsilon(T, \cdot) = y'_\epsilon(T, \cdot) = 0$  et*

$$(1.8.247) \quad \|u_\epsilon\|_{H_0^1(0, T)} \leq C.$$

■

Cette propriété de contrôlabilité uniforme permet alors de passer à la limite en  $\epsilon$  dans (1.8.245) et d'obtenir un résultat de contrôlabilité pour la solution  $y$  du problème initial. Ce type d'étude de contrôlabilité exacte avec contrainte unilatérale semble être original. Je renvoie à [32] pour l'étude théorique et numérique. A titre d'illustration, les figures 1.30 et 1.31 représentent le contrôle  $u_\epsilon$ , le déplacement à l'extrémité droite et la solution contrôlée en fonction du temps, pour  $T = 2.2$ ,  $\epsilon = 1/800$ ,  $y^0(x) = x(1 - x/2)$  et  $y^1(x) = -3x$  et  $l = 1/10$ .

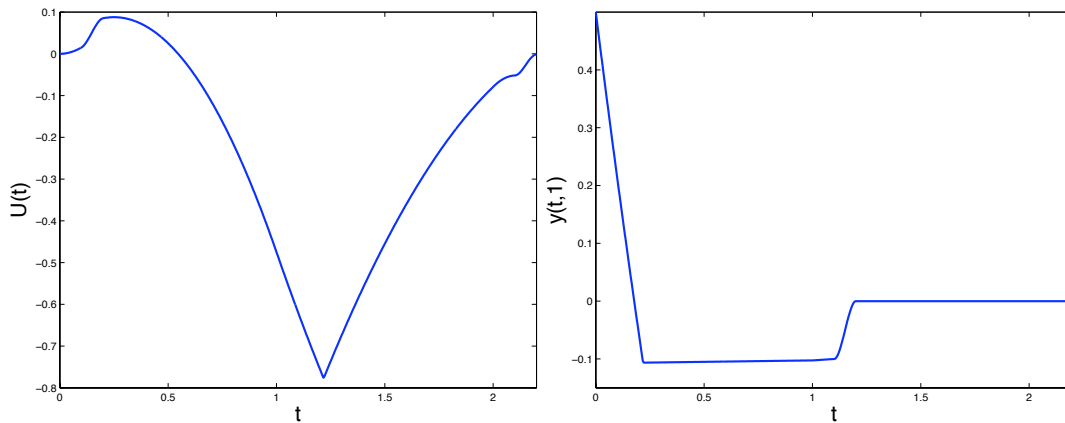


FIG. 1.30: **Gauche** : contrôle  $u_\epsilon(t)$  vs.  $t \in (0, T)$ ; **Droite** :  $y_\epsilon(t, 1)$  vs.  $t \in (0, T)$ .

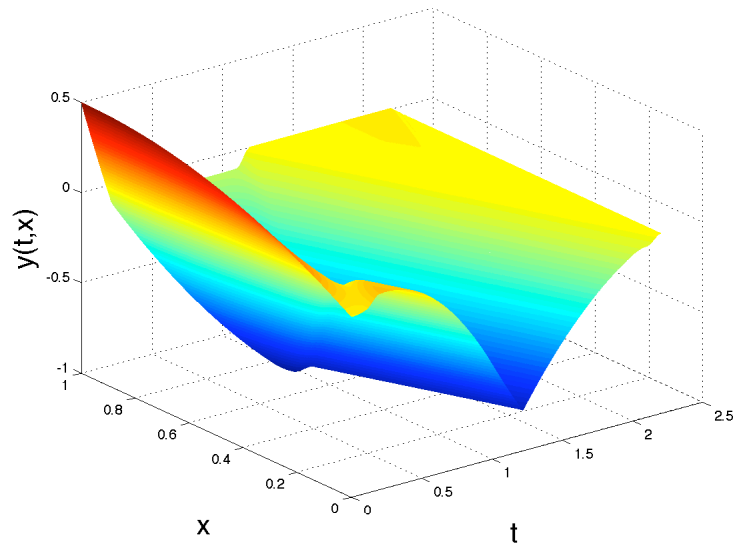


FIG. 1.31: Solution contrôlée  $y_\epsilon$  dans  $(0, T) \times (0, 1)$ .



## Chapitre 2

# Optimisation de forme et Relaxation

### 2.1 Introduction

Je résume dans ce chapitre quelques contributions théoriques et numériques à la thématique de l'*optimisation de forme*, principalement pour des équations dynamiques. Ces travaux ont été motivés initialement par l'optimisation de la zone d'amortissement  $\omega$  incluse dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  pour l'équation des ondes amorties (voir [19] puis [24, 25]) :

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} y''_{\omega,a} - \Delta y_{\omega,a} + a(\mathbf{x}) \mathcal{X}_\omega y'_{\omega,a} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y_{\omega,a} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y_{\omega,a}(0, \mathbf{x}) = y_0(\mathbf{x}), \quad y'_{\omega,a}(0, \mathbf{x}) = y_1(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Afin d'optimiser l'amortissement de la solution de ce système, on s'intéresse au problème *non linéaire* suivant :

$$(2.1.2) \quad (P_\omega) : \inf_{\omega \subset \Omega} E(\omega, a, T), \quad E(\omega, a, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{\omega,a}|^2 + |\nabla y_{\omega,a}|^2) dx, \quad t \geq 0.$$

La recherche de l'infimum d'une fonctionnelle, ici  $E$ , qui dépend quadratiquement du gradient de la solution d'une équation aux dérivées partielles - est typiquement un problème mal posé dans le sens où cet infimum n'est pas nécessairement atteint dans la classe des fonctions caractéristiques. Je renvoie aux contre-exemples standards donnés dans [Mur77], dans des cas elliptique et parabolique. La résolution numérique de ce problème suggère en fait - nous le verrons dès la section suivante - qu'une telle propriété dépend de l'amplitude de la fonction de dissipation  $a$ . Il convient alors, soit de rajouter des hypothèses géométriques (typiquement de régularité) sur la variable de forme  $\omega$  (voir l'ouvrage récent [HP05]), soit d'associer au problème  $(P_\omega)$  une relaxation  $(RP_\omega)$ , c'est-à-dire un problème bien posé dont le minimum coïncide avec l'infimum du problème originel (voir par exemple l'ouvrage [All02] dans le cadre de l'homogénéisation). Ce chapitre s'inscrit dans cette seconde voie, faisant usage de l'approche variationnelle non convexe couplée à la notion de mesure de Young, s'appuyant ainsi sur les références [Dac89, Ped97].

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs exemples d'optimisation de forme pour lesquels nous déterminons une formulation relaxée bien posée puis discutons quelques applications numériques. Au préalable, dans la section 2.2, on utilise la méthode des lignes de niveaux pour résoudre numériquement le problème  $(P_\omega)$ , exhibant dans certaines situations son caractère mal posé. Dans la section 2.3 quelques rappels de calcul des variations et de la notion de mesure de Young sont donnés. Dans la section 2.4, on utilise une approche variationnelle et les  $H^1$ -mesures de Young pour associer au problème  $(P_\omega)$  une formulation relaxée, expériences numériques à l'appui. Fort de cela, on considère alors le problème plus difficile de la distribution optimale de deux matériaux isotropes dans la situation dynamique de l'équation des ondes non amorties puis amorties (Section 2.5). La section 2.6 aborde le cas de l'équation de la chaleur - en utilisant les mesures de Young *Div-Rot* - tandis que la section 2.7 couple la notion de contrôlabilité exacte de la

partie précédente à celle de l'optimisation de forme. On traite enfin - dans un cas statique - la relaxation d'un problème issu de la mécanique de la rupture (Section 2.8).

## 2.2 Amortissement de l'équation des ondes : étude numérique par la méthode des niveaux

### 2.2.1 Introduction

Je décris ici la référence [19]. Soient  $T > 0$  et  $\Omega$  un domaine de  $C^2(\mathbb{R}^2)$  et  $y_{\omega,a}$  la solution du système (2.7.163) avec  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ . On suppose  $(y_0, y_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$  indépendant de  $\omega$  et de  $a$ . Le système (2.1.1) est alors bien posé (voir [LM68]) et la solution faible unique appartient à

$$(2.2.3) \quad y_{\omega,a} \in C((0, T); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap C^2((0, T); L^2(\Omega)).$$

Rappelons que l'énergie non croissante associée est donnée par

$$(2.2.4) \quad E(\omega, a, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{\omega,a}(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla y_{\omega,a}(t, \mathbf{x})|^2) dx, \quad \forall t > 0.$$

Pour tout réel  $L$  de  $(0, 1)$ , on s'intéresse à la résolution numérique du problème *non linéaire* suivant :

$$(2.2.5) \quad (P_\omega) : \inf_{\omega \in \Omega_L} E(\omega, a, T), \quad \Omega_L = \{\omega \subset \Omega, |\omega| = L|\Omega|\}, \quad \forall a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+).$$

$|\omega|$  désigne la mesure de Lebesgue de l'ouvert  $\omega$ .  $(P_\omega)$  - illustré par la Figure 2.1 - est un problème d'optimisation de forme, et consiste à optimiser la dissipation du système à l'instant  $T$ . Sans hypothèse géométrique sur  $\omega$ , il s'agit d'un problème typiquement mal posé dans la mesure où l'infimum peut ne pas être atteint dans la classe des fonctions caractéristiques : le domaine optimal est alors composé d'un nombre arbitrairement grand de composantes disjointes. Cela est en fait relié au phénomène d'*over-damping*, caractéristique de l'équation des ondes, qui se traduit par une réduction de la dissipation pour les *larges* valeurs de  $a$  (voir [Fre98, LG97]). Cette observation motive alors l'analyse, en parallèle, du second problème - plus simple - suivant :

$$(2.2.6) \quad (P_a) : \inf_{a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)} E(\omega, a, T), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Insistons dès maintenant sur le fait que nous ne faisons aucune hypothèse *a priori* d'optique géométrique sur  $\omega$ , contrairement aux références [HH03, HH05, HM01] qui maximisent le taux de décroissance exponentielle de l'énergie, uniformément sur les données initiales  $(y_0, y_1)$ . On suppose dans cette section que le domaine  $\omega$  est suffisamment régulier de façon à rendre le problème bien posé (voir à nouveau par exemple [HP05]).

### 2.2.2 Variation de $E$ par rapport à $\omega$ et $a$

Le calcul de la dérivée de forme de la fonction coût  $E(\cdot, a, T)$  par rapport à  $\omega$  permet de mettre en œuvre numériquement une méthode de gradient. Afin d'alléger les expressions, notons simplement  $y$  pour  $y_{\omega,a}$ . Avant le calcul de la dérivée, nous prenons en compte la contrainte d'aire sur  $\omega$  via un paramètre réel de pénalisation  $\varepsilon > 0$  menant au problème

$$(2.2.7) \quad (P_\omega^\varepsilon) : \inf_{\omega \subset \Omega} E^\varepsilon(\omega, a, T)$$

avec

$$(2.2.8) \quad E^\varepsilon(\omega, a, T) = E(\omega, a, T) + \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} (|\omega| - L|\Omega|)^2.$$

Le domaine  $\Omega$  est fixe et les données  $(y_0, y_1)$  sont indépendantes de  $\omega$ . On utilise la méthode standard de perturbation de domaine (voir [SZ92, DZ01]) supposant ici que  $\omega$  est de classe  $C^1(\Omega)$ . Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  et le champ de vecteur  $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , tel que  $\theta_{|\partial\Omega} = 0$  et  $\theta$  soit non nul dans un voisinage de  $\partial\omega$ . On renvoie à [DZ01, HP05] pour la définition suivante.

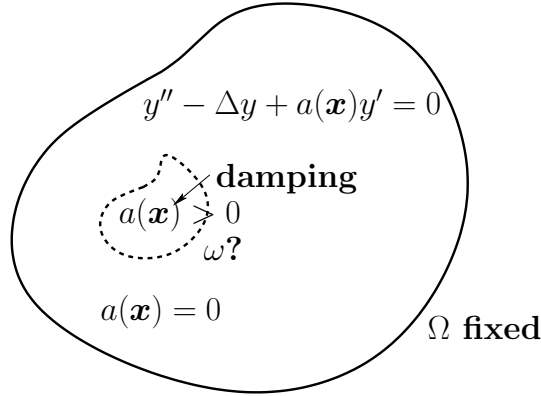


FIG. 2.1: Illustration de  $(P_\omega)$  - Optimisation du support  $\omega$  de la fonction de dissipation afin de minimiser  $E(\omega, a, T)$ .

**Définition 2.2.1.** La dérivée de la fonctionnelle  $E^\varepsilon$  par rapport à une variation de  $\omega \subset \Omega$  dans la direction  $\theta$  est définie comme la dérivée au sens de Fréchet dans  $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  en 0 de l'application  $\theta \rightarrow E^\varepsilon((Id + \theta)(\omega))$ , i.e.

$$(2.2.9) \quad E^\varepsilon((Id + \theta)(\omega), a, T) = E^\varepsilon(\omega, a, T) + \frac{\partial E^\varepsilon(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \theta + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)}).$$

■

Cette dérivée est une forme linéaire continue sur  $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  et ne dépend seulement du champ  $\theta$  que dans un voisinage arbitraire de  $\partial\omega$ .

**Théorème 2.2.2.** La dérivée de forme de  $E^\varepsilon$  est donnée par l'expression :

$$(2.2.10) \quad \frac{\partial E^\varepsilon(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \theta = \int_{\partial\omega} \left[ \varepsilon^{-1}(|\omega| - L|\Omega|) + a \int_0^T y'(t, \mathbf{x}) p(t, \mathbf{x}) dt \right] \theta \cdot \nu d\sigma$$

où  $\nu$  désigne la normale extérieure et  $p$  la solution du problème adjoint suivant :

$$(2.2.11) \quad \begin{cases} p'' - \Delta p - a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega p' = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ p(T, \mathbf{x}) = -y'(T, \mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ p'(T, \mathbf{x}) = -a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y'(T, \mathbf{x}) - \Delta y(T, \mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

■

**Remarque 2.2.3.** – Si  $\omega \subset \Omega_L$  et si  $a(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\partial\omega$ , alors la variation première est nulle.

– De (2.2.3), on a  $(p(T, \cdot), p'(T, \cdot)) \in (H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ . Le système (2.2.11) est bien posé dans  $C((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ . Il en résulte que  $ay'p \in C((0, T); W^{1,1}(\Omega))$  et que la dérivée a un sens sur  $\partial\omega$ .

■

*Preuve du théorème 2.2.2.* Afin d'éviter les crochets de dualité, on donne une preuve formelle supposant les solutions  $y$  et  $p$  suffisamment régulières (on renvoie par exemple à [CZ99]). Les domaines  $\Omega$  et  $\omega$  étant indépendants du temps, on considère la formulation variationnelle pour tout  $\varphi \in C((0, T); H_0^1(\Omega))$ ,

$$(2.2.12) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_\Omega (y'' \varphi + \nabla y \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_0^T \int_\omega ay' \varphi dx dt = 0, \\ \int_\Omega (y(0, \cdot) - y_0) \varphi(0, \cdot) dx = 0, \quad \int_\Omega (y'(0, \cdot) - y_1) \varphi(0, \cdot) dx = 0, \end{cases}$$



puis on applique la méthode de dérivation de domaine pour identifier le problème dont  $Y$  - dérivée Lagrangienne première de  $y$  - est solution :

$$(2.2.13) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} (Y''\varphi + \nabla Y \cdot \nabla \varphi) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} aY'\varphi dxdt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathcal{A}(\theta) \cdot \nabla y \cdot \nabla \varphi + y'' \operatorname{div} \theta \varphi) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} ay' \operatorname{div} \theta \varphi dxdt = 0, \\ \int_{\Omega} (Y(0, \cdot) - \nabla_{y_0} \cdot \theta) \varphi(0, \cdot) dx = 0; \quad \int_{\Omega} (Y'(0, \cdot) - \nabla_{y_1} \cdot \theta) \varphi(0, \cdot) dx = 0. \end{cases}$$

L'opérateur  $\mathcal{A} : W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  est défini par  $\mathcal{A}(\theta) = \operatorname{div} \theta Id - (\nabla \theta + \nabla \theta^*)$  où  $\nabla \theta^*$  est le transposé de  $\nabla \theta$ . Similairement, la variation de l'énergie est

$$(2.2.14) \quad \frac{\partial E(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \theta = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (|y'(T)|^2 + |\nabla y(T)|^2) \operatorname{div} \theta - (\nabla \theta + (\nabla \theta)^*) \cdot \nabla y(T) \cdot \nabla y(T) \right) dx \\ + \int_{\Omega} \left( y'(T) Y'(T) + \nabla y(T) \cdot \nabla Y(T) \right) dx$$

que l'on réécrit maintenant en termes de  $y$  et  $p$ . Il vient

$$(2.2.15) \quad \int_{\Omega} [y'(T) Y'(T) + \nabla y(T) \cdot \nabla Y(T)] dx = \\ \int_0^T \int_{\Omega} (p'' Y - Y'' p) dxdt + \int_{\Omega} (p'(0) Y(0) - p(0) Y'(0)) dx + \int_{\omega} ay'(T) Y(T) dx$$

puis de (2.1.1) et (2.2.11),

$$(2.2.16) \quad \int_0^T \int_{\Omega} (p'' Y - Y'' p) dxdt = \int_{\omega} a(p(T) Y(T) - p(0) Y(0)) dx \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathcal{A}(\theta) \cdot \nabla y \cdot \nabla p + y'' p \operatorname{div} \theta) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} ay' p \operatorname{div} \theta dxdt$$

impliquant alors, puisque  $p(T) = -y'(T)$ ,

$$(2.2.17) \quad \frac{\partial E(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \theta = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (|y'(T)|^2 + |\nabla y(T)|^2) \operatorname{div} \theta - (\nabla \theta + (\nabla \theta)^*) \cdot \nabla y(T) \cdot \nabla y(T) \right) dx \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathcal{A}(\theta) \cdot \nabla y \cdot \nabla p + y'' p \operatorname{div} \theta) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} ay' p \operatorname{div} \theta dxdt \\ - \int_{\omega} ap(0) Y(0) dx + \int_{\Omega} (p'(0) Y(0) - p(0) Y'(0)) dx.$$

Utilisant la relation  $\mathcal{A}(\theta) \cdot \nabla y \cdot \nabla p = (\theta_{1,1} - \theta_{2,2})(y_{,2} p_{,2} - y_{,1} p_{,1}) - (\theta_{1,2} + \theta_{2,1})(y_{,1} p_{,2} + y_{,2} p_{,1})$  et  $\theta_{|\partial\Omega} = 0$ , nous obtenons

$$(2.2.18) \quad \int_0^T \int_{\Omega} (\mathcal{A}(\theta) \cdot \nabla y \cdot \nabla p + y'' p \operatorname{div} \theta) dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \theta (\Delta y - y'') + \nabla y \cdot \theta \Delta p - \nabla y'' \cdot \theta p) dxdt \\ = \int_0^T \int_{\omega} \nabla p \cdot \theta ay' dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla y \cdot \theta \Delta p - \nabla y'' \cdot \theta p) dxdt.$$

Quelques intégrations et l'indépendance de  $\theta$  vis-à-vis du temps conduisent alors à l'expression

$$(2.2.19) \quad \frac{\partial E(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \theta = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (|y'(T)|^2 + |\nabla y(T)|^2) \operatorname{div} \theta - (\nabla \theta + (\nabla \theta)^*) \cdot \nabla y(T) \cdot \nabla y(T) \right) dx \\ + \int_0^T \int_{\omega} \operatorname{div}(ay' p \theta) d\omega dt + \int_{\Omega} (\nabla y'(T) \cdot \theta y'(T) - \nabla y(T) \cdot \theta \Delta y(T)) dx.$$

Finalement, de  $\operatorname{div}(|y'(T)|^2 \boldsymbol{\theta}) = |y'(T)|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} + 2y'(T) \nabla y'(T) \cdot \boldsymbol{\theta}$  et de

$$(2.2.20) \quad \int_{\Omega} \nabla(|\nabla y(T)|^2) \cdot \boldsymbol{\theta} dx = - \int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\theta} + \nabla \boldsymbol{\theta}^*) \cdot \nabla y(T) \cdot \nabla y(T) dx - 2 \int_{\Omega} \nabla y(T) \cdot \boldsymbol{\theta} \Delta y(T) dx$$

on conclut que

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E(\omega, a, T)}{\partial \omega} \cdot \boldsymbol{\theta} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}((|y'(T)|^2 + |\nabla y(T)|^2) \boldsymbol{\theta}) dx + \int_0^T \int_{\omega} \operatorname{div}(a y' p \boldsymbol{\theta}) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\partial \omega} a y' p \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma dt \end{aligned}$$

utilisant  $\boldsymbol{\theta}|_{\partial \Omega} = 0$  dans la première intégrale. La relation (2.2.10) résulte alors de

$$(2.2.22) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} (|\omega| - L|\Omega|) \cdot \boldsymbol{\theta} = \int_{\partial \omega} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma.$$

■

De façon plus simple, il vient le résultat suivant :

**Théorème 2.2.4.** *La dérivée première de E par rapport à a dans la direction  $a^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$  est :*

$$(2.2.23) \quad \frac{\partial E(\omega, a, T)}{\partial a} \cdot a^1 = \int_0^T \int_{\omega} a^1 y'(t, \mathbf{x}) p(t, \mathbf{x}) dx dt$$

où p est solution de (2.2.11).

■

### 2.2.3 Minimisation par rapport à $\omega$ - Méthode des lignes de niveaux (Level set)

Il résulte de (2.2.10) qu'une direction de descente est donnée par

$$(2.2.24) \quad \boldsymbol{\theta} = -j^\varepsilon(y_\omega, p_\omega, T) \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{x} \in \partial \omega,$$

avec  $j^\varepsilon(y_\omega, p_\omega, T) = \varepsilon^{-1} (|\omega| - L|\Omega|) + a \int_0^T y'_{\omega, a}(t, \mathbf{x}) p_{\omega, a}(t, \mathbf{x}) dt$ , définissant le domaine perturbé  $\omega^\eta = (Id + \eta \boldsymbol{\theta})(\omega)$  (on rappelle que  $\omega \in C^1(\Omega)$ ). Le paramètre  $\eta > 0$  est choisi suffisamment petit afin que la relation formelle suivante

$$(2.2.25) \quad E^\varepsilon(\omega^\eta, a, T) = E^\varepsilon(\omega, a, T) - \eta \int_{\partial \omega} (j^\varepsilon(y_\omega, p_\omega, T))^2 d\sigma + O(\eta^2)$$

assure la décroissance de  $E^\varepsilon$ . On peut implémenter numériquement cette procédure dans un cadre Lagrangien<sup>1</sup> nécessitant le remaillage après chaque perturbation du domaine. Suivant des développements récents en optimisation de forme [AJT04, WWG03], nous lui préférons le cadre Eulérien et la méthode des lignes de niveaux, permettant de capturer sur un maillage fixe la frontière libre de  $\omega$  (voir également [Bur03, BO05]). Cette méthode introduite dans [OS88] (voir également [Set96]) permet de décrire  $\partial \omega$  indépendamment du maillage de  $\Omega$  : soit  $\psi$  une fonction de niveau sur  $\Omega$  telle que

$$(2.2.26) \quad \psi(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial \omega, \quad \psi(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \omega,$$

qui permet de caractériser l'interface  $\partial \omega$  selon

$$(2.2.27) \quad \partial \omega = \{\mathbf{x}(\tau) \in \Omega \text{ tel que } \psi(\mathbf{x}(\tau), \tau) = 0\},$$

où  $\tau$  désigne une variable pseudo-temporelle, monotone avec le temps. La différentiation de (2.2.27) par rapport à  $\tau$  conduit à

$$(2.2.28) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\mathbf{x}(\tau), \tau) + \nabla \psi(\mathbf{x}(\tau), \tau) \cdot \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} = 0.$$

<sup>1</sup>voir par exemple [1] sur la propagation des fronts de fissure dans les coques.

Désignant par  $\mathbf{F}$  la vitesse normale extérieure de  $\partial\omega$  telle que  $\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau))$  avec  $\mathbf{v} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ , il apparaît l'équation non linéaire d'Hamilton-Jacobi du première ordre suivante :

$$(2.2.29) \quad \frac{\partial\psi}{\partial\tau}(\mathbf{x}, \tau) + F(\mathbf{x}, \tau)|\nabla\psi(\mathbf{x}, \tau)| = 0, \quad \psi(\mathbf{x}, \tau = 0) \text{ donné.}$$

Si l'on suppose que la frontière  $\partial\omega$  évolue au cours du pseudo-temps  $\tau$  avec la vitesse normale  $\mathbf{F} = -j^\varepsilon(y_{\omega,a}, p_{\omega,a}, T)\mathbf{v}$  comme suggéré par (2.2.24), le transport de la fonction de niveau  $\psi$  est équivalent au déplacement de la frontière libre selon la direction  $-\partial E^\varepsilon/\partial\omega$ . En conséquence, le système aux dérivées partielles à résoudre est

$$(2.2.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} - j^\varepsilon(y_{\omega,a}, p_{\omega,a}, T)|\nabla\psi| = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \psi(\cdot, \tau = 0) = \psi_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On impose dans la pratique que  $\psi$  soit constante et positive sur  $\partial\Omega$  de façon à assurer la condition  $\partial\omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ .

La minimisation de  $E$  par rapport à la variable  $a$  ne pose pas de difficulté : dans le cas où la fonction de dissipation est constante sur  $\omega$ , la direction de descente est donnée par

$$(2.2.31) \quad a^1 = - \int_0^T \int_\omega y'_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) p_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) dx dt$$

tandis que dans le cas général (voir la figure 2.8), on a

$$(2.2.32) \quad a^1(\mathbf{x}) = - \int_0^T y'_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) p_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) dt, \quad \forall \mathbf{x} \in \omega.$$

**Remarque 2.2.5.** Plaçons-nous (pour simplifier) dans le cas où la fonction  $a$  est constante sur  $\omega$ . La dérivée par rapport à  $a$  permet d'obtenir facilement une dérivée topologique de  $E$ , notion introduite dans [GGM01, SZ99]. Précisément, en prenant  $a = 0$  et  $\omega = D(\mathbf{x}_0, \rho) = \{\mathbf{x} \in \Omega, \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \rho\} \subset \Omega$  dans l'égalité

$$(2.2.33) \quad E(\omega, a + \eta a^1, T) = E(\omega, a, T) + \eta a^1 \int_0^T \int_\omega y'_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) p_{\omega,a}(t, \mathbf{x}) dt dx + o(\eta),$$

nous aboutissons à

$$(2.2.34) \quad E(D(\mathbf{x}_0, \rho), \eta a^1, T) = E(D(\mathbf{x}_0, \rho), 0, T) + \eta a^1 \int_{D(\mathbf{x}_0, \rho)} \int_0^T y'_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) p_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) dt dx + o(\eta).$$

Observant alors que  $E(D(\mathbf{x}_0, \rho), 0, T) = E(\emptyset, \eta a^1, T)$  pour tout  $\eta$  et  $a^1$ , on obtient, pour toute valeur de  $\rho$  la différence des énergies associées aux systèmes conservatif et dissipatif en fonction seulement des solutions du cas conservatif  $y_{\theta,0}$  et  $p_{\theta,0}$ , i.e. (prenant  $a = \eta a^1$ )

$$(2.2.35) \quad E(D(\mathbf{x}_0, \rho), a, T) = E(\emptyset, a, T) + a \int_{D(\mathbf{x}_0, \rho)} \int_0^T y'_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) p_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) dt dx + o(a).$$

Lorsque l'amplitude de la dissipation  $a$  est faible, cette relation permet d'initialiser la fonction de niveau. De façon similaire, on obtient pour toute valeur de  $a$ , la relation

$$(2.2.36) \quad E(D(\mathbf{x}_0, \rho), a, T) = E(\emptyset, a, T) + \pi \rho^2 \int_0^T a y'_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) p_{\theta,0}(t, \mathbf{x}) dt dx + o(\rho^2).$$

■

## 2.2.4 Exemples numériques

On donne quelques exemples numériques afin de mettre en évidence l'influence du phénomène d'*overdamping*. On traite principalement le cas où la fonction de dissipation est constante sur  $\omega$ . On ne considère ici que des données initiales régulières (ne générant pas de hautes fréquences) afin d'éviter l'introduction d'un terme de viscosité discutée dans la section 1.5. On renvoie à [19] pour l'influence sur la forme optimale dans le cas contraire et pour les détails de l'approximation numérique.

**Minimisation par rapport à  $\omega$  pour  $a(x) = 10X_\omega(x)$** 

On considère sur le carré unité  $\Omega$  la donnée

$$(2.2.37) \quad y_0(\mathbf{x}) = 100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad y_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$$

et  $L = 1/10$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $T = 1$ . Appliquons en premier lieu la relation (2.2.35). Soit  $\alpha = \sqrt{2}\pi$ . La solution du système conservatif associée à  $(y_0, y_1)$  est donnée par  $y_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) = \cos(\alpha t)y_0(\mathbf{x})$  entraînant

$$(2.2.38) \quad \begin{cases} p_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) = \alpha \sin(\alpha t)y_0(\mathbf{x}), & p'_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) = \alpha^2 \cos(\alpha t)y_0(\mathbf{x}), \\ p_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) = \alpha \left( \sin(\alpha T) \cos(\alpha(t-T)) + \cos(\alpha T) \sin(\alpha(t-T)) \right) y_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

puis  $\int_0^T y'_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) p_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) dt = -\frac{\alpha}{4}(2\alpha T - \sin(2\alpha T))y_0(\mathbf{x})^2 < 0$ . De la relation (2.2.35), il vient

$$(2.2.39) \quad E(\omega, a, T) - E(\omega, 0, T) = -\frac{\alpha a}{4}(2\alpha T - \sin(2\alpha T)) \int_{\omega} (y_0(\mathbf{x}))^2 dx + o(a), \quad \forall T \geq 0.$$

Pour toute fonction de dissipation de *faible* amplitude  $a$  et pour tout  $T > 0$ , le domaine  $\omega$  optimal est alors celui qui maximise l'intégrale  $\int_{\omega} (y_0(\mathbf{x}))^2 dx$ , proche du cercle centré en  $(1/2, 1/2)$  dans le carré unité. La simulation confirme cette prédiction dans le cas  $a = 10$ . Les figures 2.2 et 2.4 représentent l'évolution de  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi_k(\mathbf{x}) = 0\} = \partial\omega_k$  en fonction des itérations indexées par  $k$  pour deux initialisations distinctes (tracées en pointillé). Il apparaît que la limite est indépendante de l'initialisation, suggérant l'existence d'un unique minimum. De la même façon, si on prend la donnée  $y_0(\mathbf{x}) = 100 \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2)$  menant  $y_{\omega,0}(t, \mathbf{x}) = 100 \cos(\sqrt{5}\pi t) \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ , la relation (2.2.39) demeure avec  $\alpha = \sqrt{5}\pi$  et met en évidence que le domaine optimal est relié aux points  $(1/4, 1/2)$  et  $(3/4, 1/2)$  où la fonction  $y_0^2$  admet ses maxima. A nouveau, la simulation est en accord (Figure 2.5 et Figure 2.6). Avant de voir ce qui se produit pour  $a$  *grand*, fixons  $\omega$  et minimisons par rapport à la fonction  $a$ .

**Minimisation par rapport à  $a$  : illustration de l'*over-damping***

Soit  $\omega_{1/2}$  le disque de centre  $(1/2, 1/2)$  et d'aire  $L = 1/10$ . Avec les données précédentes, la figure 2.7 représente l'énergie  $E(\omega_{1/2}, a, T = 1)$  en fonction de  $a$  constante sur  $\omega = \omega_{1/2}$ . Le minimum est atteint pour la valeur finie  $a \approx 15.33$ , illustrant ce phénomène d'*over-damping* (on calcule que  $E(\omega, 0, T) - E(\omega, a, T) \approx O(a^{-0.78})$ ). Naturellement, on réduit la valeur du coût lorsque l'on minimise sur la classe des fonctions de dissipation non constantes sur  $\omega$ , en utilisant (2.2.32). On observe alors, sur la figure 2.8, que la fonction de dissipation devient localement négative, en accord avec les références [Fre98, LG97]. On observe également que la valeur des dérivées de  $a$  est de plus en plus grande sur  $\partial\omega$  : cela est conforme avec [CC01] qui obtient dans le cas  $\omega = \Omega = (0, 1)$  que la fonction  $a(x) = 1/x$  permet de contrôler à zéro la solution  $y_{\omega,a}$  au temps  $T = 2$  !

**Minimisation par rapport à  $\omega$  pour  $a(x) = 25.X_\omega(x)$** 

Revenons à la minimisation par rapport à  $\omega$  avec  $a = 25$  (à la place de  $a = 10$ ). La position centrale n'est plus optimale ! Par ailleurs, il apparaît que la limite des zéros de la ligne de niveau dépend de l'initialisation (Figure 2.9) : on obtient notamment des domaines non symétriques malgré la symétrie des données. Il n'y a pas unicité des minima. Cela n'est pas en contradiction avec (2.2.39) qui requiert  $a$  suffisamment petit. On verra dans la section 2.4 que le problème  $(P_\omega)$  est mal posé si le coefficient d'amortissement excède une valeur critique.

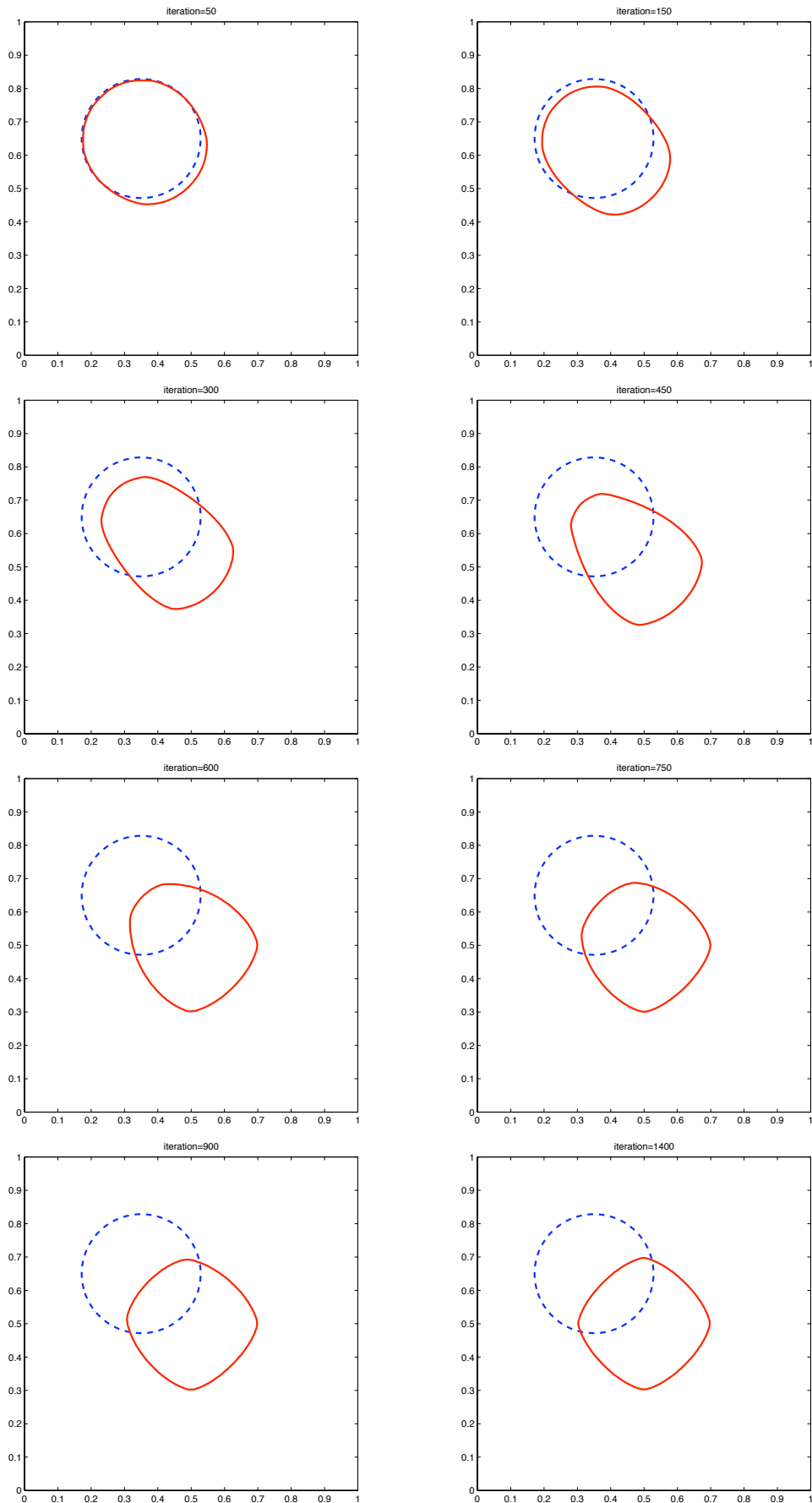


FIG. 2.2: UNICITÉ DE LA POSITION OPTIMALE -  $(y_0, y_1) = (100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1.$ ,  $a = 10.$  - Evolution de  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi_k(\mathbf{x}) = 0\}$  vs.  $k.$

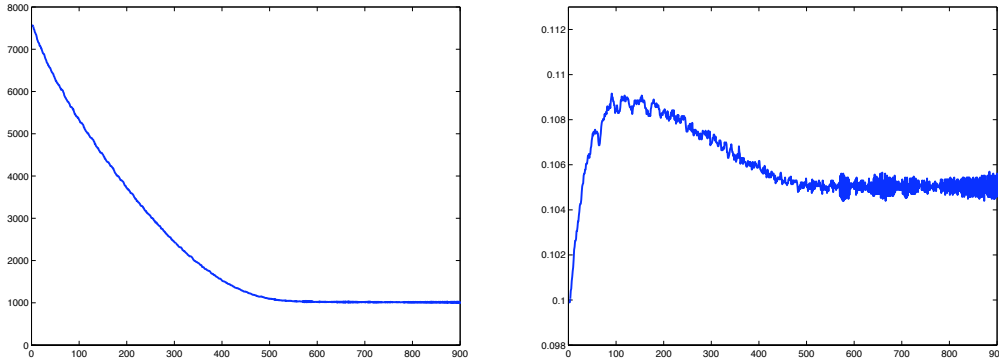


FIG. 2.3:  $(y_0, y_1) = (100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1$  - Evolution de  $E(\omega_k, a, T)$  (gauche) et  $|\omega_k|$  (droite) vs.  $k$  (associé à la figure 2.2).

### 2.3 Rappels sur les mesures de Young appliquées au calcul des variations

A l'aide d'une reformulation variationnelle adéquate, les problèmes d'optimisation de forme peuvent se réécrire sous la forme classique suivante

$$(2.3.40) \quad (P) : \inf \left\{ \int_{\Omega} W(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}, \quad p \in (1, \infty)$$

où  $u$  est la solution d'une équation aux dérivées partielles et  $u_0$  sa trace sur le bord du domaine  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit enfin  $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. A l'image de la section précédente, ce type de problème est - pour de nombreuses applications simples et concrètes - mal posé et l'infimum n'est pas atteint. La raison est généralement dûe au manque de convexité (ou quasi-convexité) de la fonction  $W$  par rapport à son troisième argument : un exemple scalaire simple donné par L.C. YOUNG (voir [Dac89]) est :

$$(2.3.41) \quad (P_1) : \inf \left\{ I(u) = \int_0^1 (u^2(x) + (u_x^2(x) - 1)^2) dx : u \in W_0^{1,4}(0, 1) \right\}.$$

L'infimum égal à zéro n'est atteint par aucun élément de  $W_0^{1,4}(0, 1)$ . Relaxer le problème  $(P)$  consiste à déterminer une formulation bien posée  $(RP)$ , et dont le minimum coïncide avec l'infimum du problème initial. La notion de quasi-convexité introduite par C.B. MORREY permet une telle étude.

Avant d'étudier quelques cas issus de l'optimisation de forme, nous rappelons quelques notions classiques et importantes d'analyse non convexe, puis faisons le lien avec les mesures paramétrées de Young.

#### 2.3.1 Méthode directe en calcul des variations

Je renvoie le lecteur à [Dac89]. De façon standard, l'existence de solution pour le problème  $(P)$  est reliée au caractère faiblement semi-continu inférieur de la fonctionnelle  $I$ .

**Théorème 2.3.1.** Soient un espace de Banach réflexif  $X$  et  $I : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle telle que

- $I$  est semi-continue inférieure pour la topologie faible associée à  $X$  ;
- $I$  est coercive sur  $X$ , i.e. pour tout  $u \in X$ , il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $I(u) \geq \alpha \|u\| + \beta$  ;
- Il existe au moins un élément  $\tilde{u}$  de  $X$  tel que  $I(\tilde{u}) < \infty$ .

Alors, il existe au moins un élément  $\bar{u}$  de  $X$  tel que  $I(\bar{u}) = \inf\{I(u); u \in X\}$ . ■

Dans la situation particulière où  $I$  prend la forme intégrale  $(P)$  ci-dessus, la coercivité de  $I$ , permettant l'extraction d'une sous-suite faiblement convergente dans  $X$ , est reliée à des hypothèses de croissance sur la fonction  $W$ . Par ailleurs, dans le cas scalaire où  $n = 1$  et/ou  $m = 1$ , la fonctionnelle  $I$  est faiblement semi-continue inférieure faible si et seulement si la fonction  $W$  est convexe par rapport à son troisième argument : précisément (voir [Dac89], chapitre 3)

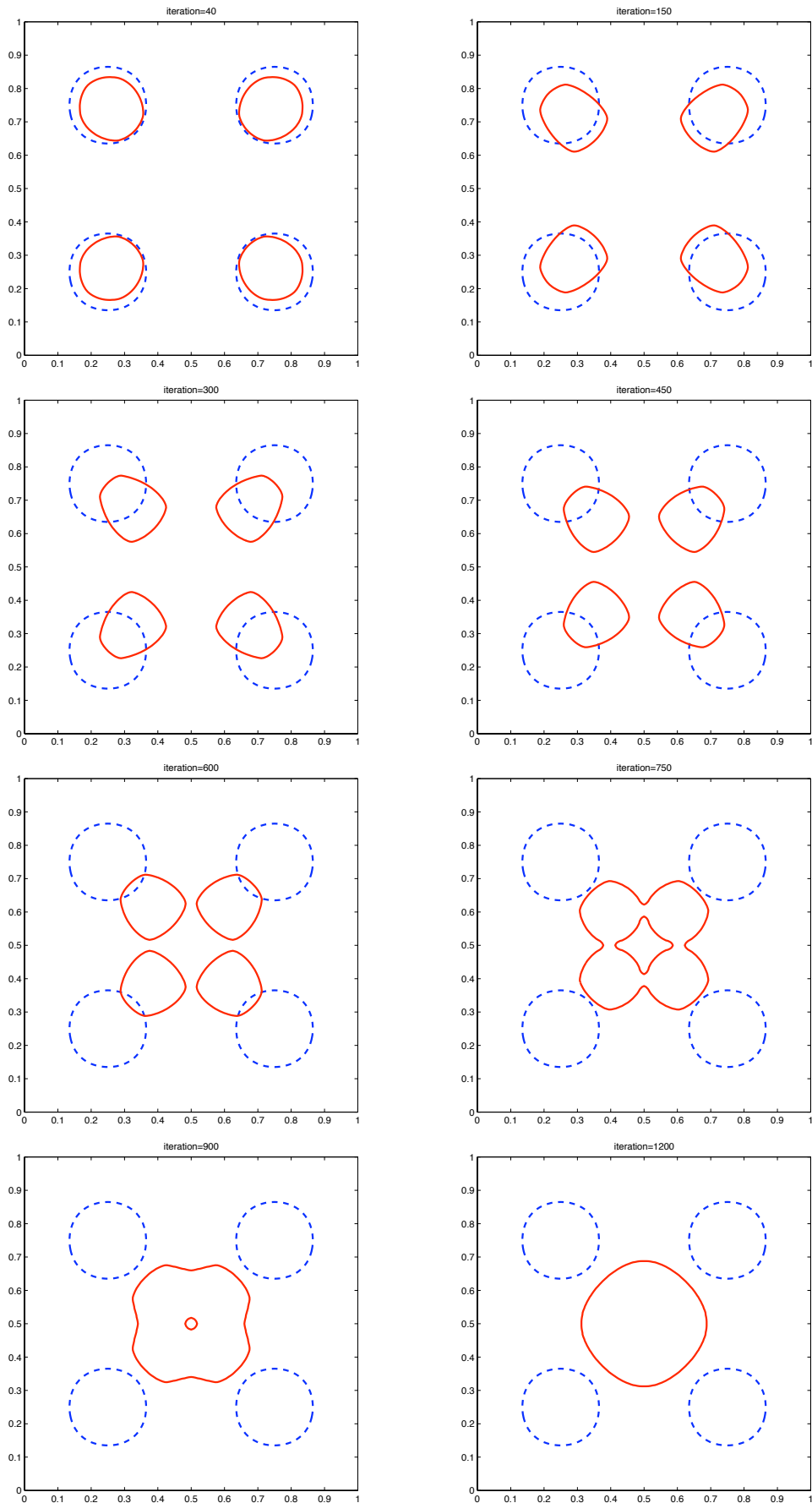


FIG. 2.4:  $(y_0, y_1) = (100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1$ ,  $a = 10$ . - Evolution de  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi_k(\mathbf{x}) = 0\}$  vs.  $k$ .

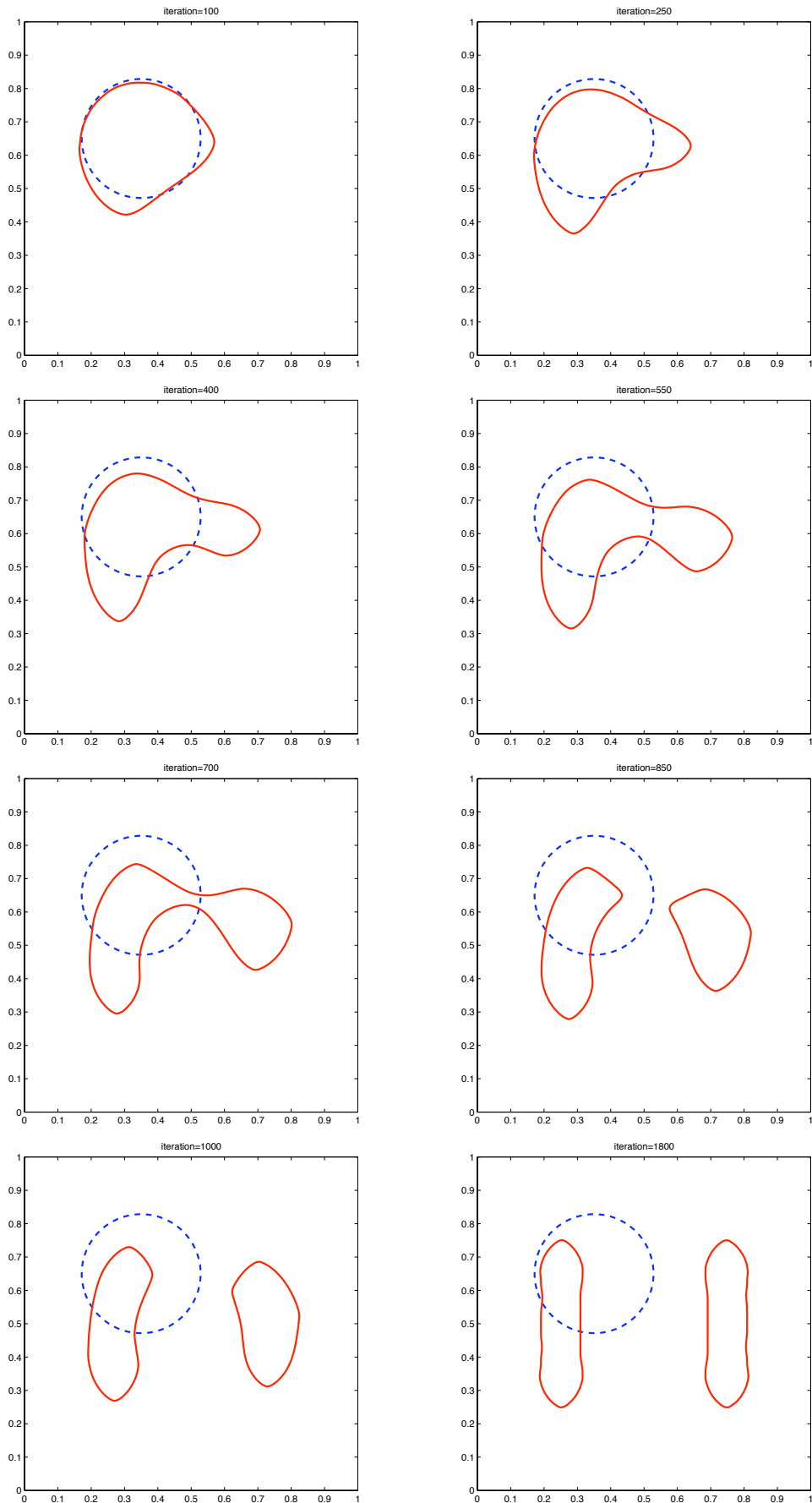


FIG. 2.5:  $(y_0, y_1) = (100 \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1$ ,  $a = 10$ . - Evolution de  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi_k(\mathbf{x}) = 0\}$  vs.  $k$ .



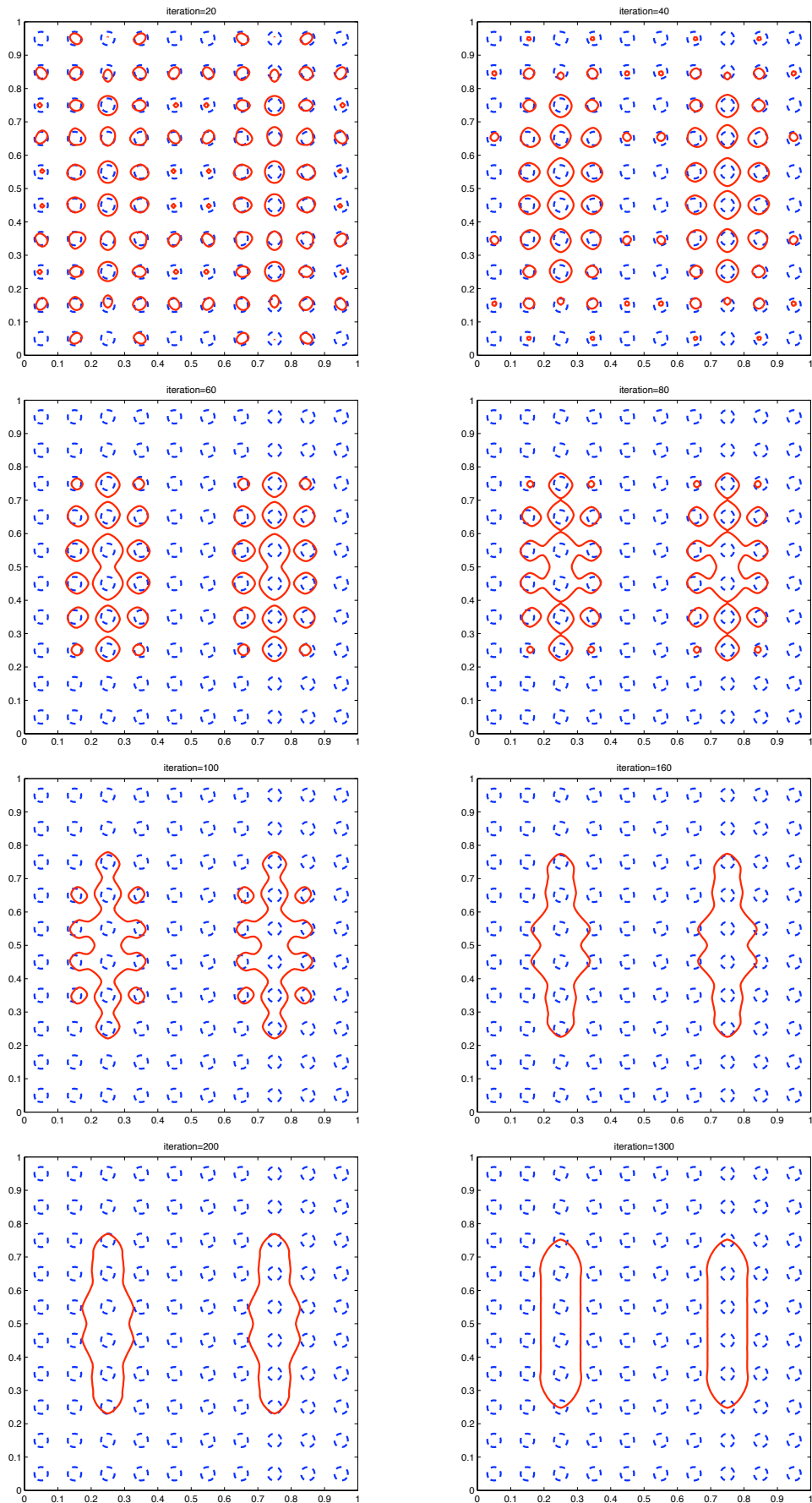


FIG. 2.6:  $(y_0, y_1) = (100 \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1$ ,  $a = 10$ . - Evolution de  $\{x \in \Omega, \psi_k(x) = 0\}$  vs.  $k$ .

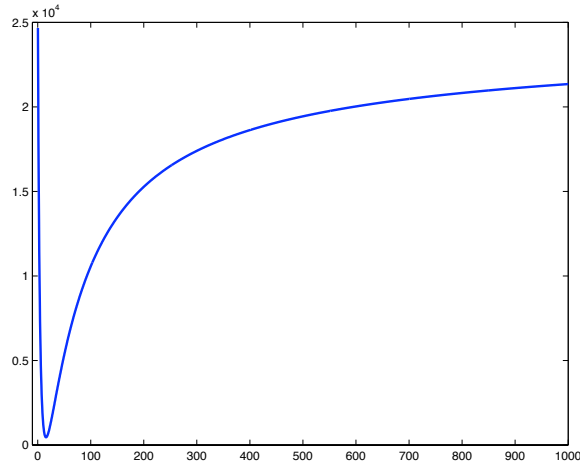


FIG. 2.7: Illustration du phénomène d'over-damping  $-E(\omega_{1/2}, a, T = 1)$  vs.  $a$ .

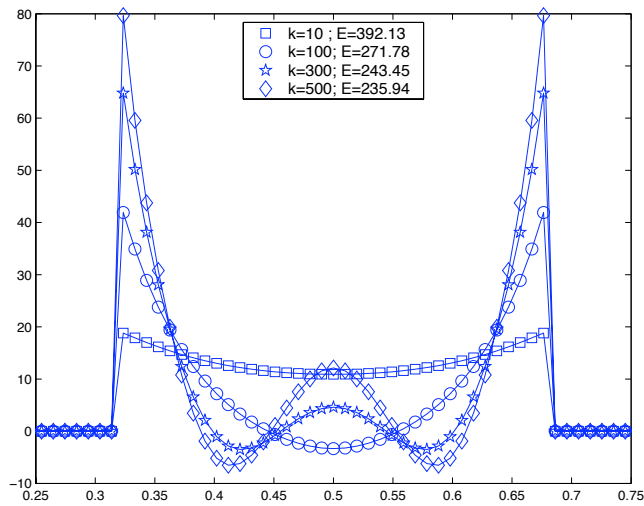


FIG. 2.8: Optimisation de  $a$  non constant sur  $\omega_{1/2} \subset (0, 1)^2$  - Graphe de  $a_k(x_1, x_2 = 1/2)$ ,  $x_1 \in [0.25, 0.75]$  selon  $(Ox_1)$  vs.  $k$  - LA FONCTION DE DISSIPATION DEVIENT LOCALEMENT NÉGATIVE ET "EXPLOSE" SUR LE BORD.

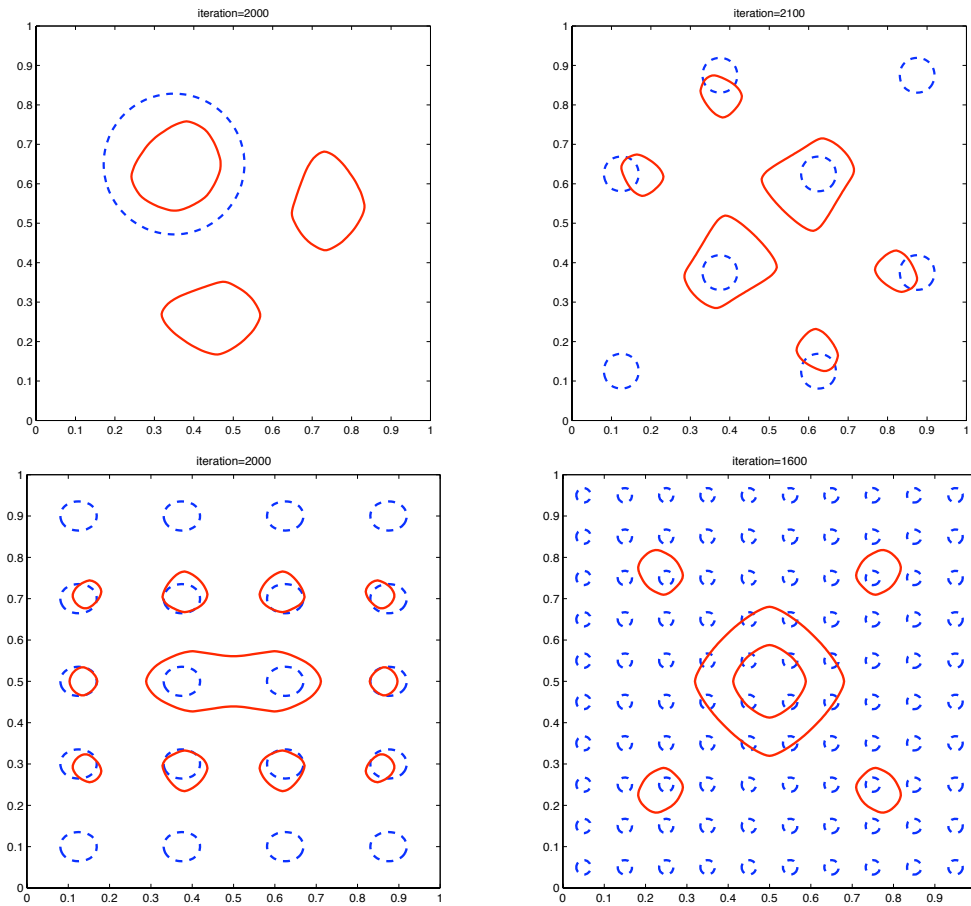


FIG. 2.9:  $(y_0, y_1) = (100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), 0)$ ,  $T = 1$ ,  $a = 25$  - "limite" en  $k$  de  $\{x \in \Omega, \psi_k(x) = 0\}$  pour différente initialisation de  $\omega_0$ . - haut gauche :  $E(\omega, a, T) = 101.08$  - haut droit :  $E(\omega, a, T) = 93.47$  - bas gauche :  $E(\omega, a, T) = 34.82$  - bas droit :  $E(\omega, a, T) = 50.35$  - NON UNICITÉ DU MINIMUM ET PERTE DE SYMÉTRIE.

**Théorème 2.3.2** (Cas scalaire). Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $W$  une fonction de Carathéodory de  $\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$(2.3.42) \quad |W(x, u, \xi)| \leq c(x, |u|, |\xi|), \quad W(x, u, \xi) \geq a(x) \cdot \xi + b(x)$$

pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ , pour tout  $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  et pour un certain  $a \in (L^p(\Omega))^n$ ,  $b \in L^1(\Omega)$ .  $c$  est une fonction croissante par rapport à  $|u|$  et  $|\xi|$  et localement intégrable en  $x$ . Alors la fonctionnelle  $I$  est faiblement séquentiellement inférieurement continue dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  si et seulement si la fonction  $W(x, u, \cdot)$  est convexe. ■

Dans le cas vectoriel ( $n > 1$  et/ou  $m > 1$ ), la convexité de la fonction  $W$  est suffisante mais pas nécessaire. On introduit dans ce cas la notion de quasi-convexité :

**Définition 2.3.3.** La fonction  $\phi : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et localement intégrable est quasi-convexe si et seulement si

$$(2.3.43) \quad \phi(Y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi(Y + \nabla u(x)) dx$$

pour tout  $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et tout  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Il vient alors le résultat suivant :

**Théorème 2.3.4** (Cas vectoriel). Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $W$  une fonction de Carathéodory de  $\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$(2.3.44) \quad c(|\xi|^p - 1) \leq W(x, u, \xi) \leq h(x, u)(1 + |\xi|^p), \quad c, C > 0$$

pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ , pour tout  $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  et pour un certain  $h \in L_{loc}^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$  continu par rapport à  $u$ . On suppose de plus que  $W(x, u, \cdot)$  est quasi-convexe. Alors la fonctionnelle  $I$  est faiblement semi-continue inférieurement dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et le problème (P) admet au moins une solution. ■

Dans le cas scalaire, les notions de convexité et de quasi-convexité coïncident. Le résultat général précédent suggère alors d'introduire le quasi-convexifié de la fonction  $W$ .

**Définition 2.3.5.** Soit  $\phi : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le quasi-convexifié (ou enveloppe convexe)  $\phi$  est défini par

$$(2.3.45) \quad Q\phi(Y) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi(Y + \nabla u(x)) dx; u \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}$$

pour tout  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

On a alors le théorème de relaxation suivant, établi par B. DACOROGNA :

**Théorème 2.3.6.** Soit  $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m}$  une fonction de Carathéodory telle que

$$(2.3.46) \quad c(|\xi|^p - 1) \leq W(x, u, \xi) \leq h(x, u)(1 + |\xi|^p), \quad c, C > 0$$

pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ , pour tout  $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  et pour un certain  $h \in L_{loc}^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$  continu par rapport à  $u$ . Alors, pour tout  $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ,  $p \in (1, \infty)$ , l'égalité suivante a lieu

$$(2.3.47) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} W(x, u, \nabla u) dx; u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\} = \inf \left\{ \int_{\Omega} QW(x, u, \nabla u) dx; u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

■

Concernant le problème académique  $(P_1)$ , le problème relaxé est

$$(2.3.48) \quad (RP_1) : \quad \inf \left\{ \bar{I}(u) = \int_0^1 (u^2(x) + (u_x^2(x) - 1)^2 \chi_{|u_x| \geq 1}(x)) dx : u \in W_0^{1,4}(0, 1) \right\}$$

et admet au moins la solution  $\bar{u} \equiv 0$  telle que  $\bar{I}(\bar{u}) = 0$ . Par ailleurs, on exhibe une suite  $\{u_j\}$  convergeant faiblement vers  $\bar{u}$  dans  $W^{1,4}(0, 1)$  telle que  $I(u_j)$  converge vers  $\bar{I}(\bar{u})$  quand  $j \rightarrow \infty$ . On écrit  $\inf(P_1) = \min(RP_1)$ . L'intégrande de  $\bar{I}$  est le quasi-convexifié  $QW$  de la fonction  $W$ . Malheureusement, pour les problèmes qui vont suivre, le quasi-convexifié de  $W$ , défini de façon peu explicite, est bien plus difficile à obtenir. On utilise alors deux notions *intermédiaires* dûes respectivement à BALL et à MORREY : d'une part, la *polyconvexité*

**Définition 2.3.7.** La fonction  $\phi : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  est *polyconvexe* si et seulement si il existe une fonction  $g$  convexe telle que  $\phi(A) = g(M(A))$  pour toute matrice  $A$ , où  $M(A)$  désigne le vecteur de tous les mineurs de  $A$ .

et d'autre part la *convexité de rang 1* :

**Définition 2.3.8.** La fonction  $\phi : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe de rang 1 si et seulement si

$$(2.3.49) \quad \phi(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2) \leq \lambda \phi(A_1) + (1 - \lambda)\phi(A_2)$$

pour tout  $\lambda \in (0, 1)$  et  $A_1, A_2$  deux matrices telles que  $\text{rang}(A_1 - A_2) \leq 1$ .

On a alors les implications suivantes :

$$(2.3.50) \quad \phi \text{ convexe} \implies \phi \text{ poly-convexe} \implies \phi \text{ quasi-convexe} \implies \phi \text{ convexe de rang 1.}$$

Enfin, de la même façon que précédemment, on définit les enveloppes poly-convexe et convexe de rang 1, qui fournissent respectivement une borne inférieure et supérieure de l'infimum cherché.

Les enveloppes précédentes, en particulier  $QW$ , peuvent être exprimées à l'aide des mesures paramétrées de Young. Dans certains cas particuliers, ces mesures en permettent même une expression explicite.

### 2.3.2 Mesures de Young

Je renvoie au chapitre 8 du récent ouvrage [FL07] pour une introduction à cette notion, à [Ped97] pour une présentation plus complète et à [Ped00, Mul99] pour des applications.

**Définition 2.3.9.** Une mesure de Young est une famille de mesures de probabilité  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  associée à une suite de fonction  $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telle que  $\text{supp}(\nu_x) \subset \mathbb{R}^m$  et qui dépend de façon mesurable de  $x \in \Omega$ , i.e. pour toute fonction continue  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction de  $x$

$$(2.3.51) \quad \bar{\phi} = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = \langle \phi, \nu_x \rangle$$

est mesurable.

La mesure  $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  est dite homogène lorsque la famille de probabilité est réduite à une unique mesure, i.e.  $\nu_x = \nu$  presque partout dans  $\Omega$ . A titre d'exemple, considérons la fonction  $f(x) = 2\chi_{[0, 1/2]}(x) - 1$  pour  $x \in [0, 1]$  et étendue par périodicité à  $\mathbb{R}$  tout entier. Soit enfin  $f_j(x) = f(jx)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . La suite  $f_j$  converge faiblement vers 0 pour  $\Omega = (0, 1)$ . De plus, pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on a

$$(2.3.52) \quad \int_0^1 \phi(f_j(x)) dx \rightarrow \frac{1}{2}(\phi(1) + \phi(-1)), \quad j \rightarrow \infty.$$

La mesure de Young associée à la suite de fonctions  $f_j$  est donc  $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ . Cette mesure, somme de deux dirac, est homogène. Une propriété fondamentale de cette famille de mesures de probabilité est qu'elle

permet d'identifier la limite faible de fonctions. Précisément, pour toute suite  $\{\phi(f_j)\}$  convergeant faiblement dans  $L^\infty(\Omega) - \star$  (ou plus généralement faiblement dans  $L^p(\Omega)$ ), la limite faible est reliée à la fonction  $\bar{\phi}$  :

$$(2.3.53) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(f_j) h(x) dx = \int_{\Omega} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\lambda) dv_x(\lambda) dx$$

pour tout  $h \in L^1(\Omega)$ . Intuitivement, la mesure de Young représente la limite des distributions de probabilité des valeurs de la séquence  $\{f_j\}$  : si  $B_R(x)$  désigne la boule centrée en  $x$  de rayon  $R$  et  $E \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble mesurable, alors

$$(2.3.54) \quad v_x(E) = \lim_{R \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{| \{y \in B_R(x); f_j(y) \in E\} |}{|B_R(x)|}.$$

La propriété précédente montre l'intérêt des mesures de Young pour représenter et manipuler la limite d'intégrales du type  $\int_{\Omega} W(x, u_j, \nabla u_j) dx$  où  $u_j$  est la solution d'une équation aux dérivées partielles associée à une suite minimisante de fonctions caractéristiques  $\mathcal{X}_{\omega_j}$ . Précisément,

**Théorème 2.3.10** (Théorème fondamental des mesures de Young). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble mesurable et soient  $z_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  des fonctions mesurables telles que*

$$(2.3.55) \quad \sup_j \int_{\Omega} g(|z_j|) dx < \infty$$

où  $g : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty]$  est une fonction continue, non décroissante telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ . Il existe une sous-suite et une famille de mesures de probabilité  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  (la mesure de Young associée) dépendant de  $x$  de façon mesurable, vérifiant la propriété suivante : pour toute séquence  $\{\psi(x, z_j(x))\}$  convergeant faiblement dans  $L^1(\Omega)$ , la limite faible est la fonction

$$(2.3.56) \quad \bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) dv_x(\lambda)$$

pour toute fonction de Carathéodory  $\psi(x, \lambda) : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

Un exemple important est obtenu en prenant  $g(t) = t^p$ ,  $p \geq 1$ . Chaque suite bornée dans  $L^p$  contient une sous-suite générant une mesure de Young, selon le sens donné par le théorème précédent. Supposons maintenant que la séquence  $W(x, u_j, \nabla u_j)$  ( $W(\nabla u_j)$  dans la suite pour simplifier) converge faiblement dans  $L^1(\Omega)$  où  $\{u_j\}$  est minimisante pour  $I$ , telle que

$$(2.3.57) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W(\nabla u_j(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{nm}} W(A) dv_x(A) dx$$

où  $\{\nu_x\}$  désigne la mesure de Young associée à  $\{\nabla u_j\}$ , bornée dans  $L^p$  si  $W$  possède des propriétés de coercivité. Enfin, puisque

$$(2.3.58) \quad \nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} A dv_x(A)$$

est la limite faible de  $\{\nabla u_j\}$  en prenant  $\psi(x, \lambda) = \lambda$  dans le théorème précédent, la semi-continuité inférieure faible aura lieu si

$$(2.3.59) \quad \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} W(A) dv_x(A) dx \geq \int_{\Omega} W\left(\int_{\mathbb{R}^{n \times m}} A dv_x(A)\right) dx$$

qui est une inégalité type Jensen pour les mesures. Puisque, pour toute suite  $\{z_j\}$  de fonctions mesurables associée à la mesure  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ , l'inégalité suivante a lieu

$$(2.3.60) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_E \psi(x, z_j(x)) dx \geq \int_E \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) dv_x(\lambda) dx$$

pour toute fonction  $\psi$  de Carathéodory, bornée inférieurement, et  $E$  un ensemble mesurable de  $\Omega$ , la semi-continuité inférieure pour  $I$  est donc réduite à une inégalité en mesure sur  $W$ .

**Définition 2.3.11.** Soit  $v = \{v_x\}_{x \in \Omega}$  une mesure de Young. On dit que  $v$  est une mesure de Young gradient (ou  $W^{1,p}$ -) si il existe une suite  $\{u_j\}_j$  de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  telle que  $\{\nabla u_j\}$  génère  $v$ .

Une caractérisation complète des  $W^{1,p}$ -mesures de Young dont on comprend le rôle important dans la reformulation variationnelle - a été donnée par KINDERLEHRER et PEDREGAL dans [KP92] (utilisée ensuite dans un cadre variationnel dans [Ped97]).

**Théorème 2.3.12.** Soient  $\{u_j\}$  une suite de fonctions de  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > 1$ , et  $v = \{v_x\}_{x \in \Omega}$  une famille de mesures de probabilité supportées sur  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .  $v$  est une mesure de Young générée par la suite de gradient  $\{\nabla u_j\}$  si et seulement si :

- $\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} A dv_x(A)$  pour un certain  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ;
- $\int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \phi(A) dv_x(A) \geq \phi(\nabla u(x))$  pour presque tout  $x \in \Omega$  et toute fonction  $\phi$  quasi-convexe ayant une croissance polynômiale d'ordre  $p$  au moins ;
- $\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |A|^p dv_x(A) dx < \infty$ .

■

Cette caractérisation importante permet alors d'exprimer l'enveloppe quasi-convexe de toute fonction  $\phi$  en terme de  $v$  :

$$(2.3.61) \quad Q\phi(Y) = \inf_v \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \phi(A) dv(A); v \text{ est une mesure de Young gradient homogène}; \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} A dv(A) = Y \right\}.$$

Le calcul d'une formulation relaxée, sous les hypothèses du Théorème 2.3.6 se ramène alors à un problème de minimisation sur les mesures de Young, générées par une suite minimisante (de gradient)  $\{u_j\}$  pour  $I$ . Je renvoie à [Ped04, Ped07] dans le cas où  $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  n'est pas une fonction de Carathéodory.

## 2.4 Relaxation du problème de l'optimisation de l'amortissement des ondes

On utilise maintenant l'approche variationnelle non convexe et la mesure de Young pour analyser un problème similaire à celui de la section 2.2. Il s'agit d'un travail en collaboration avec PABLO PEDREGAL<sup>2</sup> et FRANCISCO PERIAGO<sup>3</sup> (voir [24, 25]) : le problème est

$$(2.4.62) \quad (P_\omega) : \quad \inf_{\omega \in \Omega_L} J(\mathcal{X}_\omega) \quad \text{où} \quad J(\mathcal{X}_\omega) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt$$

et

$$(2.4.63) \quad \Omega_L = \{\omega \subset \Omega : |\omega| = L|\Omega|, \quad 0 < L < 1\},$$

$u$  est solution de

$$(2.4.64) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) \mathcal{X}_\omega(x) u_t = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans [25], on montre le résultat suivant, dans les cas  $N = 1$  et  $N = 2$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ). Soit le problème :

$$(2.4.65) \quad (RP_\omega) : \quad \inf_{s \in L^\infty(\Omega)} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt$$

où  $u$  (fonction de  $s$ ) est solution unique de

$$(2.4.66) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) s(x) u_t = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \Omega, \\ 0 \leq s(x) \leq 1, \quad \int_{\Omega} s(x) dx = L|\Omega| & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

<sup>2</sup>ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La-Mancha, Ciudad Real, Espagne.

<sup>3</sup>Dpto. Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena, Espagne.

**Théorème 2.4.1.** *Le problème  $(RP_\omega)$  est une relaxation de  $(P_\omega)$  dans le sens suivant :*

- Il existe des solutions optimales pour  $(RP_\omega)$ ;
- Le minimum de  $(P_\omega)$  est égal au minimum de  $(RP_\omega)$ ;
- Si  $s$  est optimal pour  $(RP_\omega)$ , alors
  - Les suites minimisantes  $\omega_j$  pour  $(P_\omega)$  dans le cas 1-D sont exactement celles pour lesquelles la mesure de Young associée à  $\mathcal{X}_{\omega_j}$  est

$$(2.4.67) \quad s(\mathbf{x})\delta_1 + (1 - s(\mathbf{x}))\delta_0;$$

- Dans le cas 2-D, des suites minimisantes sont associées à des laminés d'ordre 1 de normale indépendante de la variable temporelle.

■

**Remarque 2.4.2.** – Il y a une infinité de suites minimisantes possibles, les laminés d'ordre 1 pouvant être construits à partir de plusieurs échelles.

- Le problème  $(RP_\omega)$  est obtenu en remplaçant l'espace  $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  des fonctions caractéristiques par son enveloppe convexe  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  pour la topologie faible étoile de  $L^\infty$ . Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'inconnue de forme est en dehors de l'opérateur de divergence<sup>4</sup>. Par ailleurs, il résulte que si la densité  $s$  optimale est telle que  $\{\mathbf{x} \in \Omega : 0 < s(\mathbf{x}) < 1\}$  est de mesure positive, alors aucune collection finie de domaine n'est optimale pour  $(P_\omega)$ . Le minimum de  $(RP_\omega)$  fournit ainsi des informations qualitatives sur  $(P_\omega)$ .

■

#### 2.4.1 Cas unidimensionnel : $\Omega = (0, 1)$

##### Reformulation variationnelle du problème $(P_\omega)$

L'idée est de transformer la minimisation sur un ouvert en la minimisation sur un espace de fonctions, puis ensuite de calculer le quasi-convexifié de l'intégrande résultant de la transformation. On utilise de façon essentielle que  $\omega$  est indépendant du temps pour réécrire l'équation de (2.4.64) sous la forme

$$(2.4.68) \quad \operatorname{div}(u_t + a\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

où l'opérateur divergence est ici  $\operatorname{div} = (\partial_t, \partial_x)$ . Naturellement, il conviendra de vérifier *a posteriori* que le domaine optimal obtenu est indépendant du temps. De la caractérisation des vecteurs 2-D à divergence nulle, il existe un potentiel scalaire  $v = v(t, x) \in H^1((0, T) \times \Omega)$  tel que

$$(2.4.69) \quad A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \bar{u}$$

où  $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$ ,  $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$ ,  $\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$  et

$$(2.4.70) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit alors le champ de vecteur  $U = (u, v) \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$  et les ensembles de matrices

$$(2.4.71) \quad \Lambda_0 = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\}, \quad \Lambda_{1,\lambda} = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\},$$

où  $M^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors, introduisant les fonctions

$$(2.4.72) \quad W(x, U, M) = \begin{cases} \frac{1}{2} |M^{(1)}|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

<sup>4</sup>Y a-t-il des contres-exemples ? Précisément, connaît-on des situations où, lorsque la variable inconnue de forme  $\mathcal{X}$  apparaît dans le problème (fonction coût et équation d'état) en dehors d'un opérateur d'ordre supérieur ou égal à un, la formulation relaxée ne consiste pas simplement à remplacer  $\mathcal{X}$  par  $s$  ?



et

$$(2.4.73) \quad V(x, U, M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

le problème  $(P_\omega)$  est équivalent au problème vectoriel suivant :

$$(2.4.74) \quad (VP_\omega) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) \, dx \, dt$$

soumis à

$$(2.4.75) \quad \begin{cases} U \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2 \\ U^{(1)} = 0 & (0, T) \times \partial\Omega \\ U^{(1)}(0, \cdot) = u_0(\cdot), \quad U_t^{(1)}(0, \cdot) = u_1(\cdot), & \Omega \\ \int_0^1 \int_\Omega V(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) \, dx = L, & (0, T). \end{cases}$$

Cette procédure transforme le problème d'optimisation scalaire  $(P_\omega)$  avec contrainte différentiable ponctuelle en un problème vectoriel non convexe  $(VP_\omega)$ .

#### Relaxation. Preuve du Théorème 2.4.1

On utilise les  $H^1$ -mesures de Young (voir [Ped97]) afin d'obtenir une formulation relaxée. On reprend la méthodologie utilisée dans [AP03, DP05, Ped05] pour le cas elliptique.

L'obstacle principal est la non-convexité de la fonctionnelle  $W$  ( $W$  n'est même pas une fonction de Carathéodory). L'idée naturelle est d'élargir la classe des solutions admissibles permettant d'inclure toutes les limites des suites minimisantes pour  $(VP_\omega)$ , de façon à ce que la fonctionnelle résultante soit faiblement semi-continue inférieurement. On considère alors le problème

$$(2.4.76) \quad \bar{m} = \inf_U \left\{ \int_0^T \int_\Omega CQW(x, U, \nabla U(t, x), s(x)) \, dx \, dt \right\}$$

où l'infimum est pris sur les champs  $U \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$  qui satisfont les conditions aux limites et où la fonction  $s$  satisfait les contraintes

$$(2.4.77) \quad 0 \leq s(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{et} \quad \int_\Omega s(x) \, dx = L|\Omega|.$$

La quantité  $CQW(x, U(t, x), \nabla U(t, x), s(x))$  désigne le *quasi-convexifié contraint* de la densité  $W$ , défini pour tout  $(F, s) \in \mathcal{M}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}$  fixe, par

$$(2.4.78) \quad CQW(x, U, F, s) = \inf_v \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} W(x, U, M) \, d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}(F, s) \right\},$$

où

$$\mathcal{A}(F, s) = \left\{ \nu : \nu \text{ est une } H^1 \text{ - mesure de Young homogène,} \right. \\ \left. F = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} M \, d\nu(M) \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} V(M) \, d\nu(M) = s \right\}.$$

L'infimum  $\bar{m}$  est atteint, et de plus,  $m = \bar{m}$  (voir par exemple [Ped05]). La recherche d'une formulation relaxée se ramène ainsi au calcul du quasi-convexifié  $CQW$  de  $W$ . La difficulté qui apparaît est que nous ne connaissons pas explicitement la classe des mesures  $\mathcal{A}(F, s)$  nécessaire au calcul de  $CQW(x, U, F, s)$ . On suit alors la stratégie de [Ped05] en considérant tout d'abord la classe plus large  $\mathcal{A}^*$  des mesures polyconvexes. Puis, on montre que le minimum dans cette classe est en fait atteint par au moins une mesure appartenant à la classe, disons  $\mathcal{A}_*$  (les laminés), incluse dans  $\mathcal{A}(F, s)$ , de telle façon que  $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ . On en déduit alors la valeur exacte de  $CQW(x, U, F, s)$ .

**Etape 1 : Calcul du Polyconvexifié** Le (contraint)-polyconvexifié  $CPW$  associé à  $W$  est défini par

$$(2.4.79) \quad CPW(x, U, F, s) = \min_{\nu} \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} W(x, U, M) d\nu(M)$$

où la mesure  $\nu$  satisfait la contrainte

$$(2.4.80) \quad \nu \text{ commute avec le déterminant, } F = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} M d\nu(M), \quad s = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} V(x, U, M) d\nu(M).$$

Rappelons que  $\nu$  commute avec le déterminant lorsque

$$(2.4.81) \quad \det\left(\int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} F d\nu(F)\right) = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} \det(F) d\nu(F).$$

Dans le calcul de  $CPW(x, U, F, s)$ , les variables  $(x, U)$  jouent un rôle de paramètres et sont considérées constantes dans la suite. Ainsi, si on fixe  $\lambda$ , on pose  $\Lambda_1$  pour  $\Lambda_{1,\lambda}$  et on considère les fonctionnelles

$$(2.4.82) \quad W(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} |M^{(1)}|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}, \quad V(M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_1 \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_1 \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

le polyconvexifié est

$$(2.4.83) \quad CPW(F, s) = \min_{\nu} \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} W(M) d\nu(M)$$

où la mesure  $\nu$  satisfait (2.4.80). La contrainte de volume implique que cette mesure prend la forme

$$(2.4.84) \quad \nu = s\nu_1 + (1-s)\nu_0, \quad \text{avec } \text{supp}(\nu_j) \subset \Lambda_j, \quad j = 0, 1,$$

ce qui conduit, pour chaque paire  $(F, s)$ , au calcul de

$$(2.4.85) \quad \min_{\nu} \frac{s}{2} \int_{\Lambda_1} |M^{(1)}|^2 d\nu_1(M) + \frac{1-s}{2} \int_{\Lambda_0} |M^{(1)}|^2 d\nu_0(M)$$

soumis à

$$(2.4.86) \quad \begin{cases} \nu = s\nu_1 + (1-s)\nu_0 \text{ commute avec le déterminant, } & \text{supp}(\nu_j) \subset \Lambda_j, \quad j = 0, 1, \\ F = s \int_{\Lambda_1} M d\nu_1(M) + (1-s) \int_{\Lambda_0} M d\nu_0(M). \end{cases}$$

On introduit les variables

$$(2.4.87) \quad S_i = \int_{\mathbb{R}} (M_{1i})^2 d\nu^{(1i)}, \quad i = 1, 2,$$

où  $\nu^{(1i)}$  désigne la projection de  $\nu$  sur la  $(1i)$ -ème composante, et

$$(2.4.88) \quad F^j = \int_{\Lambda_j} M d\nu_j(M), \quad j = 0, 1.$$

Puisque  $F^j \in \Lambda_j$ , on a

$$(2.4.89) \quad \begin{cases} F_{11}^0 = F_{22}^0 \\ F_{12}^0 = F_{21}^0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_{11}^1 = F_{22}^1 + \lambda \\ F_{12}^1 = F_{21}^1 \end{cases}.$$

Par ailleurs, la troisième condition dans (2.4.86) implique que

$$(2.4.90) \quad \begin{cases} F_{11} = sF_{11}^1 + (1-s)F_{11}^0, & F_{12} = sF_{12}^1 + (1-s)F_{12}^0, \\ F_{21} = sF_{21}^1 + (1-s)F_{21}^0, & F_{22} = sF_{22}^1 + (1-s)F_{22}^0. \end{cases}$$

Substituant (2.4.89) dans (2.4.90), il vient le système

$$(2.4.91) \quad \begin{cases} F_{11} = sF_{11}^1 + (1-s)F_{11}^0 & F_{12} = sF_{12}^1 + (1-s)F_{12}^0, \\ F_{21} = sF_{12}^1 + (1-s)F_{12}^0 & F_{22} + s\lambda = sF_{11}^1 + (1-s)F_{11}^0 \end{cases}$$

qui possède une solution si et seulement si la condition suivante

$$(2.4.92) \quad F_{12} = F_{21}, \quad F_{11} = F_{22} + s\lambda$$

a lieu auquel cas

$$(2.4.93) \quad F_{11}^0 = \alpha, \quad F_{12}^0 = \beta \quad F_{11}^1 = \frac{1}{s}(F_{11} - (1-s)\alpha) \quad F_{12}^1 = \frac{1}{s}(F_{12} - (1-s)\beta)$$

pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Remarquons que la variable  $F_{11}^1$  est libre. De plus la commutativité avec le déterminant conduit à

$$(2.4.94) \quad \det F = s \int_{\Lambda_1} \det M dv_1(M) + (1-s) \int_{\Lambda_0} \det M dv_0(M) = S_1 - S_2 - s\lambda F_{11}^1$$

puisque

$$(2.4.95) \quad \det M = \begin{cases} (M_{11})^2 - (M_{12})^2 & \text{si } M \in \Lambda_0 \\ (M_{11})^2 - \lambda M_{11} - (M_{12})^2 & \text{si } M \in \Lambda_1. \end{cases}$$

Finalement, l'inégalité de Jensen implique les conditions sur les variables du problème

$$(2.4.96) \quad S_i \geq |F_{1i}|^2, \quad i = 1, 2.$$

En résumé, le problème de programmation mathématique à résoudre est

$$(2.4.97) \quad \text{Minimiser en } (S_j, F_{11}^1) : \quad \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

soumis à

$$(2.4.98) \quad \begin{cases} S_1 - S_2 - s\lambda F_{11}^1 = \det F \\ S_i \geq |F_{1i}|^2, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Sans difficulté, il vient  $S_i = |F_{1i}|^2, i = 1, 2$  soit

$$(2.4.99) \quad CPW(F, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}|F^{(1)}|^2 & \text{si (2.4.92) a lieu} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Etape 2 : Laminé d'ordre 1** Les deux égalités

$$(2.4.100) \quad S_i = |F_{1i}|^2, \quad i = 1, 2,$$

impliquent, par la stricte convexité de la norme euclidienne, que

$$(2.4.101) \quad \nu^{(1i)} = \delta_{F_{1i}}, \quad i = 1, 2.$$

On vérifie alors que l'unique mesure optimale qui atteint la valeur  $CPW(F, s)$  est

$$\nu = (1-s)\delta_{G^0} + s\delta_{G^1},$$

où

$$(2.4.102) \quad G^0 = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^1 = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{11} - \lambda \end{pmatrix}.$$

On vérifie que, par construction,  $G^j \in \Lambda_j$ ,  $j = 0, 1$ . De plus, puisque  $G^1 - G^0 = b \otimes n$ , avec

$$b = (0, \lambda) \quad \text{et} \quad n = (0, 1),$$

cette mesure optimale est un laminé d'ordre 1 avec normale  $n$ . Cela implique que le quasi-convexifié de  $W$  est également donné par (2.4.99).

**Remarque 2.4.3.** Il est important de réaliser que la séquence de gradient associée à la mesure  $\nu$  prend la forme

$$\begin{aligned} \nabla U^j(t, y) &= G^0 + \mathcal{X}_s(j(t, y) \cdot n) b \otimes n \\ &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{11} - \mathcal{X}_s(jy) \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{X}_s$  la fonction caractéristique de  $(0, s)$  dans  $(0, 1)$ . La séquence de gradient  $\nabla U^j$  oscille entre les deux ensembles  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  à la fréquence  $s$  et avec la normale  $n$  aux laminés. De plus, de  $n = (0, 1)$ , on déduit que la micro-structure optimale est indépendante de  $t$ . ■

**Etape 3 : Interprétation en terme des variables initiales** On pose

$$(2.4.103) \quad \lambda = -a(x) U^{(1)}(t, x) = -a(x) u(t, x),$$

qui implique en particulier que le laminé dépend *a priori* de  $(t, x)$ . Cependant, la direction des laminés est indépendante du temps : on écrit explicitement  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ . La condition de compatibilité du premier moment de la mesure  $\nu$ , est que le champ de vecteurs  $U \in (H^1((0, T) \times (0, 1)))^2$  satisfait

$$(2.4.104) \quad \nabla U(t, x) = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} M d\nu_x(M) \quad \text{p.p. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

et la contrainte de volume

$$(2.4.105) \quad \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} V(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) d\nu_x = s(x)$$

avec

$$(2.4.106) \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad \int_{\Omega} s(x) dx = L|\Omega|.$$

La condition de compatibilité (2.4.92) s'écrit alors

$$(2.4.107) \quad u_x(t, x) = v_t(t, x), \quad u_t(t, x) = v_x(t, x) - a(x) s(x) u(t, x),$$

soit

$$(2.4.108) \quad u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + a(x) s(x) u_t(t, x) = 0,$$

et l'intégrande relaxé de (2.4.99) est

$$(2.4.109) \quad CPW(x, U(t, x), \nabla U(t, x), s) = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_t^2(t, x) + u_x^2(t, x)) & \text{si (2.4.108) a lieu} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le processus est maintenant complet si on minimise par rapport à  $(U(t, x), s)$  l'expression

$$(2.4.110) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 CPW(x, U(t, x), \nabla U(t, x), s) dx dt$$

puis, si on remarque que cela est équivalent à minimiser par rapport à toutes les fonctions  $s \in L^\infty(0, 1)$  satisfaisant (2.4.106), on obtient la formulation relaxée  $(RP_\omega)$ .

L'existence d'une solution optimale pour  $(RP_\omega)$  est une conséquence du fait que  $CPW(x, U(t, x), \nabla U(t, x))$  est quasi-convexe. De plus, le minimum de  $(RP_\omega)$  coïncide avec celui de  $(VP_\omega)$  parce que les minimiseurs pour  $(RP_\omega)$  sont obtenus sous la forme de laminés du premier ordre associés à une suite de gradients admissibles  $U^j(t, x)$  pour  $(VP_\omega)$ . C'est en cela que l'information concernant les suites minimisantes de  $(VP_\omega)$  est codifiée dans  $(RP_\omega)$ .

### 2.4.2 Le cas $N = 2$

Le cas bi-dimensionnel où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est très similaire au cas 1-D. La principale différence concerne la caractérisation des champs de vecteurs à divergence nulle. On utilise pour cela les potentiels de Clebsch (voir [NUS80, Shi98]) : si  $V \in \mathbb{R}^3$  est telle que  $\operatorname{div}(V) = 0$ , alors il existe deux potentiels  $v_1, v_2$  tels que  $V = \nabla v_1 \times \nabla v_2$ . Cela permet une réécriture variationnelle du problème, supposant à nouveau que  $\omega$  est indépendant du temps.

L'équation prend la forme

$$(2.4.111) \quad \operatorname{div}(u_t + aX_\omega u, -u_{x_1}, -u_{x_2}) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega$$

de sorte qu'il existe  $v_1 = v_1(t, x_1, x_2)$  et  $v_2 = v_2(t, x_1, x_2)$  tels que

$$(2.4.112) \quad (u_t + aX_\omega u, -u_{x_1}, -u_{x_2}) = \nabla v_1 \times \nabla v_2.$$

On introduit  $U = (u, v_1, v_2) \in (H^1((0, T) \times \Omega))^3$  et les ensembles de matrices

$$(2.4.113) \quad \Lambda_0 = \{M \in \mathcal{M}^{3 \times 3} : AM^{(1)} - M^{(2)} \times M^{(3)} = 0\}, \quad \Lambda_{1,\lambda} = \{M \in \mathcal{M}^{3 \times 3} : AM^{(1)} - M^{(2)} \times M^{(3)} = \lambda e_1\},$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et

$$(2.4.114) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'introduction des potentiels de Clebsch implique que les ensembles  $\Lambda_0$  and  $\Lambda_{1,\lambda}$  sont non linéaires.

La suite, calculatoire, est similaire au cas 1-D et je renvoie à [25].

**Remarque 2.4.4.** – Nous verrons dans la section 2.6 qu'il est possible de s'affranchir de l'utilisation des potentiels de Clebsch et d'obtenir le théorème 2.4.1 en toutes dimensions. Nous utiliserons pour cela les mesures de Young div-rot analysées récemment dans le contexte de l'optimisation de forme dans [Ped07].

– Dans ce cadre, la référence [26] traite le problème  $(P_\omega)$ ,  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$  pour l'opérateur d'élasticité linéaire (qui est une généralisation du Laplacien) : l'équation principale est

$$(2.4.115) \quad \mathbf{u}'' - \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + a(x) X_\omega(x) \mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega$$

avec  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{Id} + \mu (\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T)$  le tenseur symétrique des contraintes. On renvoie également à cette référence pour des simulations numériques dans le cas isotrope bi-dimensionnel. ■

### 2.4.3 Expériences numériques pour $(RP_\omega)$

La minimisation par rapport à un ensemble de densités (apparaissant dans  $(RP_\omega)$ ) est - numériquement - bien plus aisée que la minimisation par rapport à des domaines (apparaissant dans  $(P_\omega)$ ), effectuée Section 2.2 par la méthode des lignes de niveaux.

Notons

$$(2.4.116) \quad J(s) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt$$

où  $u = u(s)$  est la solution de (2.4.66). Oubliant momentanément les contraintes  $s \in [0, 1]$  et  $\|s\|_{L^\infty(\Omega)} = L|\Omega|$  (prises en compte *a posteriori*), il vient

**Théorème 2.4.5.** *Si  $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , alors la dérivée de  $J$  par rapport à  $s$  selon  $s_1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  existe et prend la forme*

$$(2.4.117) \quad \frac{\partial J(s)}{\partial s} \cdot s_1 = \int_{\Omega} a(x)s_1(x) \int_0^T u_t(t, x)p(t, x) dt dx$$

où  $u$  est la solution de (2.4.66) et  $p$  la solution dans  $C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  du problème adjoint

$$(2.4.118) \quad \begin{cases} p_{tt} - \Delta p - a(x)s(x)p_t = u_{tt} + \Delta u, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ p = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ p(T, \cdot) = 0, \quad p_t(T, \cdot) = u_t(T, \cdot) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

■

*Preuve* - On introduit le Lagrangien

$$(2.4.119) \quad \mathcal{L}(s, \phi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T (|\phi_t|^2 + |\nabla \phi|^2) dt dx + \int_{\Omega} \int_0^T (\phi_{tt} - \Delta \phi + a(x)s(x)\phi_t)\psi dt dx$$

pour tout  $s \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\phi \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$  et  $\psi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  puis on écrit

$$(2.4.120) \quad \frac{d\mathcal{L}}{ds}(s_1) = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(s, \phi, \psi) \cdot s_1 + \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(s, \phi, \psi), \frac{\partial \phi}{\partial s} \cdot s_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(s, \phi, \psi), \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot s_1 \right\rangle.$$

Le premier terme est

$$(2.4.121) \quad \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(s, \phi, \psi) \cdot s_1 = \int_{\Omega} a(x)s_1(x) \int_0^T \phi_t(t, x)\psi(t, x) dt dx$$

pour tout  $s, \phi, \psi$  tandis que le troisième terme est identiquement nul si  $\phi = u$  solution de (2.4.66). On détermine alors  $p$  tel que pour tout  $\phi \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ ,

$$(2.4.122) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(s, \phi, p), \frac{\partial \phi}{\partial s} \cdot s_1 \right\rangle = 0,$$

ce qui conduit à la formulation du problème adjoint (2.4.118). Enfin, on écrit que  $J(s) = \mathcal{L}(s, u, p)$  et on obtient (2.4.117) de (2.4.121). Remarquons que l'intégrale (2.4.117) est bien définie, i.e.  $u_t p \in C([0, T], L^1(\Omega))$  puisque en vertu de la régularité sur  $(u_0, u_1)$ ,  $u_{tt} + \Delta u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  et ainsi  $p \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . ■

La relation (2.4.117) permet alors de mettre en place une méthode de gradient. Au préalable, revenons sur les contraintes sur  $s$ . Pour la contrainte de mesure i.e.  $\|s\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$ , on introduit un multiplicateur  $\gamma \in \mathbb{R}$  et

$$(2.4.123) \quad J_\gamma(s) = J(s) + \gamma \|s\|_{L^1(\Omega)}$$

dont la variation première est donnée par

$$(2.4.124) \quad \frac{\partial J_\gamma(s)}{\partial s} \cdot s_1 = \int_{\Omega} s_1(x) \left( a(x) \int_0^T u_t(t, x)p(t, x) dt + \gamma \right) dx$$

conduisant à la direction de descente suivante :

$$(2.4.125) \quad s_1(\mathbf{x}) = -\left(a(\mathbf{x}) \int_0^T u_t(t, \mathbf{x}) p(t, \mathbf{x}) dt + \gamma\right), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Pour toute fonction  $\eta \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$  avec  $\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}$  suffisamment petit, on a  $J_\gamma(s + \eta s_1) \leq J_\gamma(s)$ . Le multiplicateur  $\gamma$  est déterminé, afin que pour tout  $\eta \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $\|s + \eta s_1\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$  : il vient

$$(2.4.126) \quad \gamma = \frac{(\int_\Omega s(\mathbf{x}) dx - L|\Omega|) - \int_\Omega \eta(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \int_0^T u_t(t, \mathbf{x}) p(t, \mathbf{x}) dt dx}{\int_\Omega \eta(\mathbf{x}) dx}.$$

Enfin, on choisit la fonction  $\eta$  de façon à ce que  $s(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x})s_1(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Un choix simple et efficace est  $\eta(\mathbf{x}) = \varepsilon s(\mathbf{x})(1 - s(\mathbf{x}))$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega$  avec  $\varepsilon > 0$  un réel suffisamment petit (supposant sur la densité initiale la condition  $s^0(\mathbf{x})(1 - s^0(\mathbf{x})) \neq 0$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ).

### Algorithme du gradient à pas constant

L'algorithme de descente à pas constant prend alors la forme suivante : soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ ,  $L \in (0, 1)$ ,  $T > 0$  et  $\varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon_1 \ll 1$  donnés :

- Choix d'une densité initiale  $s^0 \in L^\infty(\Omega; ]0, 1[)$  ;
- pour  $k \geq 0$ , itération jusqu'à convergence (i.e.  $|J(s^{k+1}) - J(s^k)| \leq \varepsilon_1 |J(s^0)|$ ) de la façon suivante :
  - Calcul de  $u_{s^k}$  solution de (2.4.66) puis de  $p_{s^k}$  solution de (2.4.118), associées à la densité  $s = s^k$ .
  - Calcul de la direction de descente  $s_1^k$  défini par (2.4.125) où le multiplicateur  $\gamma^k$  est donné par (2.4.126).
  - Mise à jour de la densité sur  $\Omega$  :

$$(2.4.127) \quad s^{k+1} = s^k + \varepsilon s^k (1 - s^k) s_1^k$$

avec  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  suffisamment petit afin d'assurer la décroissance du coût et la condition  $s^{k+1} \in L^\infty(\Omega, [0, 1])$ .

**Remarque 2.4.6.** Dans la pratique, on prend une densité constante  $s^{(0)}$  égale à  $L$ , ce qui a l'avantage de ne privilégier *a priori* aucun minimum local. De même, la contrainte d'aire est ici rigoureusement satisfaite. Ces deux points illustrent l'intérêt de cette approche, par rapport à la méthode des lignes de niveaux, utilisées en Section 2.2. ■

### Applications numériques

Reprenons les données initiales symétriques de la section 2.2.4 et  $\Omega = (0, 1)^2$ . Dans le cas  $a = 10$ , la densité obtenue est la fonction caractéristique supportée sur une zone proche du cercle unité centré en  $(1/2, 1/2)$  et d'aire  $L$ , indiquant que pour cette valeur le problème initial est bien posé. En revanche, pour  $a = 25$ , (qui avait conduit aux situations de la Figure 2.9 et à l'existence de plusieurs minima), la densité optimale prend des valeurs strictement dans  $(0, 1)$  suggérant que le problème est mal posé et l'existence d'une micro-structure : les isovaleurs de cette densité sont représentées Figure 2.10 - gauche. Lorsque  $a = 50$  (Figure 2.10 - droite), les valeurs intermédiaires de  $s$  se répartissent sur tout le domaine : dans ces cas, le domaine optimal est composé d'un nombre arbitrairement grand de composantes disjointes.

Il reste - *d'un point de vue pratique* - à associer à cette densité optimale une suite  $(X_{\omega^M})_{(M>0)}$  de fonctions caractéristiques minimisante pour  $J$ , i.e. telle que  $\lim_{M \rightarrow \infty} J(X_{\omega^M}) = J(s^{opt})$ . Illustrons cela dans le cas 1-D ( $\Omega = (0, 1)$ ) par la figure 2.11. On divise uniformément  $\omega$  en  $M$  intervalles tel que  $\Omega = \cup_{j=1, M} [x_j, x_{j+1}]$ . A chaque intervalle, on associe la valeur moyenne

$$(2.4.128) \quad m_j = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} s^{opt}(x) dx$$

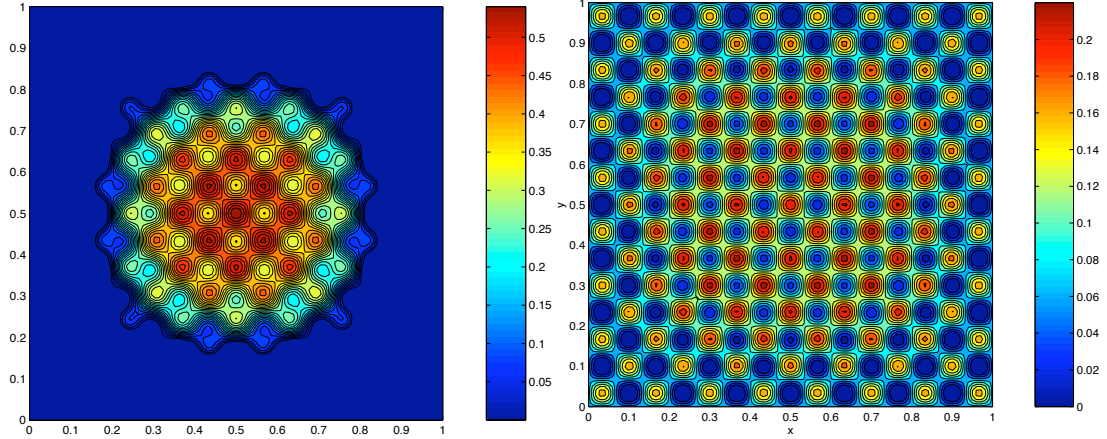


FIG. 2.10: Isovaleurs de la densité  $s$  optimale pour  $a(x) = 25X_{\Omega}(x)$  (**Gauche**) et  $a(x) = 50X_{\Omega}(x)$  (**Droite**) -  $T = 1$  - PRÉSENCE D'UNE MICRO-STRUCTURE.

puis la fonction caractéristique

$$(2.4.129) \quad \mathcal{X}_{\omega^M}(x) = \sum_{j=1}^M \mathcal{X}_{[x_j, (1-m_j)x_j + m_j x_{j+1}]}(x), \quad x \in \Omega.$$

Par construction  $\|\mathcal{X}_{\omega^M}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$  pour tout  $M > 0$ . La figure 2.11 donne quatre éléments d'une telle suite ( $M = 10, 20, 30$  et  $M = 40$ ) associés à la densité optimale représentée en pointillé. Le tableau 2.1 illustre numériquement ce processus. Sans un maillage arbitrairement fin et une initialisation très oscillante, la méthode des lignes de niveaux ne peut pas capturer de tels minima locaux.

$M$	10	20	30	40
$J(\mathcal{X}_{\omega^M})$	4.1331	3.7216	3.5413	3.4313

TAB. 2.1: Construction d'une suite minimisante pour  $J : \lim_{M \rightarrow \infty} J(\mathcal{X}_{\omega^M}) = J(s^{opt}) = 3.4212$ .

Dans le cas bi-dimensionnel, ce processus (bien que satisfaisant en pratique), ne saurait être complet, car il convient, en plus de la valeur de la densité en chaque point, de tenir compte de l'orientation des laminés (je renvoie - dans cette optique et dans le cadre de l'homogénéisation - au travail récent [PT08]).

## 2.5 Distribution spatio-temporelle pour l'équation des ondes

On traite maintenant un cas plus riche et difficile où l'inconnue de forme apparaît dans l'opérateur de divergence. Il s'agit d'un travail en collaboration avec PABLO PEDREGAL et FAUSTINO MAESTRE<sup>5</sup> (voir [11, 12]). Une seconde différence majeure par rapport au cas précédent est la **dépendance en temps du domaine optimal** cherché. K.A. Lurie dans [Lur99] introduit dans ce cas la notion de *matériaux dynamiques*.

### 2.5.1 Position du problème et résultat principal

Soit  $\Omega = (0, 1)$ . On considère la fonctionnelle

$$(2.5.130) \quad I(\mathcal{X}) = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ u_t^2(t, x) + a(t, x, \mathcal{X}) u_x^2(t, x) \right] dx dt$$

<sup>5</sup>ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La-Mancha, Ciudad Real, Espagne.



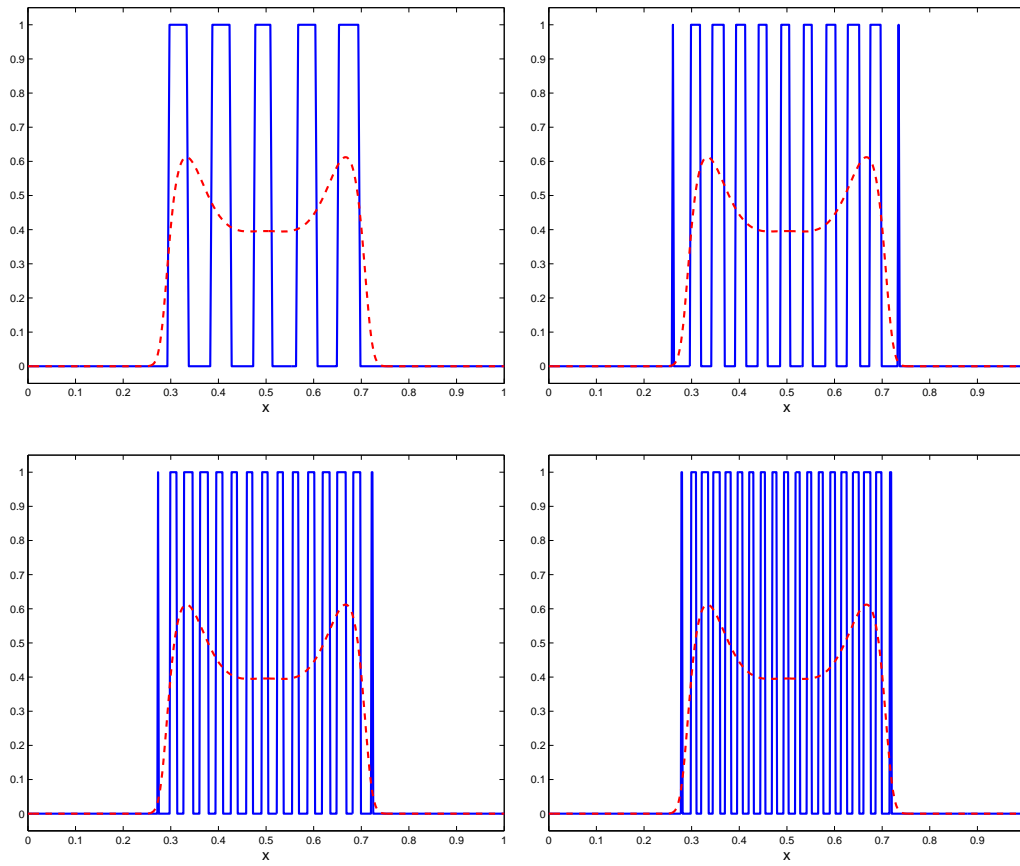


FIG. 2.11: Suite de fonctions caractéristiques associée à la densité optimale (représentée en pointillé) -  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $u_1(x) = 0$ ,  $L = 1/5$ ,  $T = 1$ .

où  $u$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}([\alpha X + \beta(1 - X)]u_x) = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{dans } (0, T). \end{cases}$$

La fonction  $X \in L^\infty([0, T] \times \Omega; \{0, 1\})$  désigne la variable de forme et indique la position du matériau de caractéristique  $\alpha$  au temps  $t$ . On suppose  $0 < \alpha < \beta$  et

$$a(t, x, X) = X(t, x)a_\alpha(t, x) + (1 - X(t, x))a_\beta(t, x),$$

avec  $a_\alpha, a_\beta \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$  tel que

$$a_\alpha(t, x) + \alpha \geq 0, \quad a_\beta(t, x) + \beta \geq 0, \quad \forall t \in (0, T), x \in \Omega.$$

Enfin, on suppose que la quantité de matériau de caractéristique  $\alpha$  est contrainte par la condition

$$\int_{\Omega} X(t, x) dx \leq V_\alpha |\Omega|, \quad \forall t \in (0, T).$$

On considère alors le problème  $(P)$  qui consiste à optimiser la distribution spatio-temporelle de deux matériaux de caractéristique respective  $\alpha$  et  $\beta$ , au sein d'une corde vibrante, le matériau  $\alpha$  étant soumis à la restriction précédente :

$$(2.5.131) \quad (P) : \quad \inf_{X \in L^\infty((0, T) \times \Omega, \{0, 1\})} I(X).$$

Ce problème généralise au cas hyperbolique le cas statique étudié dans de nombreuses références, que ce soit avec la méthode de l'homogénéisation ([All02, LV02, Tar94, Tar00]) ou alors avec des méthodes variationnelles ([AP03, Dac89, DP05, Gra01]). *A priori*, le manque de solution classique du cas elliptique exhibé dans [Mur77] demeure dans cette nouvelle situation. On utilise donc l'approche précédente pour obtenir une formulation relaxée du problème  $(P)$ . Bien que similaires, les développements sont plus élaborés.

En reprenant la procédure précédente, on réécrit le problème sous forme variationnelle à l'aide du problème vectoriel non convexe

$$(VP) : \quad \min_U \hat{I}(U) = \int_0^T \int_{\Omega} W(t, x, \nabla U(t, x)) dx dt$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (U^{(1)}, U^{(2)}) \in H^1([0, T] \times \Omega)^2, \\ U^{(1)}(0, x) = u_0(x), U_t^{(1)}(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ U^{(1)}(t, 0) = U^{(1)}(t, 1) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ \int_{\Omega} V(t, x, \nabla U(t, x)) dx \leq V_\alpha |\Omega| & \forall t \in (0, T). \end{cases}$$

Les intégrandes en présence sont

$$W(t, x, A) = \begin{cases} a_{11}^2 + a_\alpha(t, x)a_{12}^2, & \text{si } A \in \Lambda_\alpha, \\ a_{11}^2 + a_\beta(t, x)a_{12}^2, & \text{si } A \in \Lambda_\beta \setminus \Lambda_\alpha, \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$V(t, x, A) = \begin{cases} 1, & \text{si } A \in \Lambda_\alpha, \\ 0, & \text{si } A \in \Lambda_\beta \setminus \Lambda_\alpha, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variétés sont

$$(2.5.132) \quad \Lambda_\gamma = \left\{ A \in M^{2 \times 2} : M_{-\gamma} A^{(1)} - R A^{(2)} = 0 \right\}, \quad \gamma = \alpha, \beta,$$

où  $A^{(i)}$  est la  $i$ -ème colonne de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad M_{-\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat principal de [12], donné dans le théorème ci-dessous, utilise les notations suivantes : on pose

$$h(t, x) = \beta a_\alpha(t, x) - \alpha a_\beta(t, x),$$

et

$$\psi(F, s) = F_{12} F_{21} + \frac{\alpha}{s(\beta - \alpha)^2} (\beta F_{12} + F_{21})^2 + \frac{\beta}{(1-s)(\beta - \alpha)^2} (\alpha F_{12} + F_{21})^2$$

pour tout

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Le problème variationnel

$$(RP) : \quad \min_{U, s} \int_0^T \int_\Omega \varphi(t, \mathbf{x}, \nabla U(t, \mathbf{x}), s(t, \mathbf{x})) dx dt$$

soumis à

$$\begin{cases} U \in H^1([0, T] \times \Omega)^2, \quad \text{tr}(\nabla U(t, \mathbf{x})) = 0, \\ U^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad U_t^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ U^{(1)}(t, 1) = U^{(1)}(t, 0) = 0 \quad \text{dans } [0, T], \\ 0 \leq s(t, \mathbf{x}) \leq 1, \quad \int_\Omega s(t, \mathbf{x}) dx \leq V_\alpha |\Omega| \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où  $\varphi(t, \mathbf{x}, F, s)$  est **explicitement** donné par

$$(2.5.133) \quad \begin{cases} \frac{h}{s\beta(\beta - \alpha)^2} (\beta^2 |F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\beta F_{12} F_{21}) + |F_{11}|^2 - \frac{a_\beta}{\beta} F_{12} F_{21} & \text{si } h(\mathbf{x}, t) \geq 0, \psi(F, s) \leq 0, \\ \frac{-h}{(1-s)\alpha(\beta - \alpha)^2} (\alpha^2 |F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\alpha F_{12} F_{21}) + |F_{11}|^2 - \frac{a_\alpha}{\alpha} F_{12} F_{21}, & \text{si } h(\mathbf{x}, t) \leq 0, \psi(F, s) \leq 0, \\ -\det F + \frac{1}{s(1-s)(\beta - \alpha)^2} \left( ((1-s)\beta^2(\alpha + a_\alpha) + s\alpha^2(\beta + a_\beta)) |F_{12}|^2 \right. \\ \left. + ((1-s)(\alpha + a_\alpha) + s(\beta + a_\beta)) |F_{21}|^2 + 2((\alpha + a_\alpha)\beta - sh) F_{12} F_{21} \right) & \text{si } \psi(F, s) \geq 0. \end{cases}$$

est une relaxation de (P) :

**Théorème 2.5.1.** *Supposons la donnée initiale  $(u_0, u_1)$  dans  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ . Le problème variationnel (RP) est une relaxation de (P) dans le sens suivant :*

- Les infima des deux problèmes coïncident ;
- Il existe des solutions optimales pour (RP) ;
- Les micro-structures optimales sont représentées par des **laminés d'ordre un et deux**. ■

**Remarque 2.5.2.** La fonction  $\psi$  admet la factorisation importante suivante

$$(2.5.134) \quad \psi(F, s) = \frac{(\alpha(1-s) + \beta s)}{(\beta - \alpha)} \left( F_{21} + \lambda_{\alpha, \beta}^-(s) F_{12} \right) \left( F_{21} + \lambda_{\alpha, \beta}^+(s) F_{12} \right)$$

avec

$$(2.5.135) \quad \lambda_{\alpha, \beta}^-(s) = \alpha\beta / (\alpha(1-s) + \beta s), \quad \lambda_{\alpha, \beta}^+(s) = \alpha s + (1-s)\beta$$

les moyennes harmonique et arithmétique de  $\alpha$  et  $\beta$  pondérées par  $s$ . Notons que  $\alpha \leq \lambda_{\alpha, \beta}^-(s) \leq \lambda_{\alpha, \beta}^+(s) \leq \beta$  pour tout  $s \in (0, 1)$ . ■

**Remarque 2.5.3.** – La différence majeure avec le cas statique résulte du fait que les deux variétés  $\Lambda_\gamma$  sont des sous-espaces de dimension 2 dont l'intersection non vide est un sous espace de dimension 1. De plus, il y a une connection de rang un entre ces deux sous-espaces. Une conséquence intéressante est que l'intégrande relaxé est partout fini (exception faite de la condition sur le déterminant) en contraste avec le cas elliptique où l'intégrande est fini seulement sur un sous espace quasi-convexe.

- L'équation des ondes a disparu explicitement dans la formulation relaxée, et se trouve *incorporée* dans la fonctionnelle  $\varphi$ <sup>6</sup>. De ce fait, le problème (RP) apparaît plus délicat à résoudre numériquement.
- Insistons sur le fait que la distribution optimale sous-jacente varie avec le temps, ce qui s'inscrit dans le cadre des travaux de Lurie [Lur98, Lur99, Lur04] introduisant, dans le cadre de l'homogénéisation, la notion de matériaux dynamiques. En particulier, l'auteur aborde, dans le cas 1-D, le problème de la *G-fermeture* dans cette situation. ■

## 2.5.2 Calcul du polyconvexifié et des laminés d'ordre un et deux

On rappelle quelques points de la procédure menant à l'expression de  $\varphi$ , renvoyant à [12] pour les détails.

### Calcul du polyconvexifié

Comme précédemment, le polyconvexifié  $CPW(F, s)$  est relié au problème d'optimisation suivant :

$$\min_v \int_{M^{2 \times 2}} W(A) d\nu(A)$$

où

$$(2.5.136) \quad \nu \in \mathcal{A}(F, s) = \left\{ \nu : \nu \text{ est une mesure de Young homogène qui commute avec le déterminant,} \right. \\ \left. F = \int_{M^{2 \times 2}} A d\nu(A), \int_{M^{2 \times 2}} V(A) d\nu(A) = s \right\}.$$

De la contrainte de volume, il vient la décomposition

$$\nu = s\nu_\alpha + (1-s)\nu_\beta, \quad \text{supp}(\nu_\gamma) \subset \Lambda_\gamma, \quad \gamma = \alpha, \beta,$$

tandis que la définition du premier moment implique,

$$(2.5.137) \quad F = s \int_{\Lambda_\alpha} A d\nu_\alpha(A) + (1-s) \int_{\Lambda_\beta} A d\nu_\beta(A).$$

Désignant par

$$F_\gamma = \int_{\Lambda_\gamma} A d\nu_\gamma(A), \quad \gamma = \alpha, \beta,$$

<sup>6</sup>Nous verrons dans la section 2.8 comment en extraire une équation aux dérivées partielles.

on a  $F_\gamma \in \Lambda_\gamma$  pour  $\gamma = \alpha, \beta$ , de sorte que (2.5.137) conduit à un système compatible en  $F_\gamma$  si et seulement si

$$F_{11} + F_{22} = 0, \text{ i.e. } \text{trace}(F) = 0$$

ce que l'on suppose dans la suite et ce qui permet de faire l'identification

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & -\mathbf{x} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

et de réécrire  $\Lambda_\gamma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{z} + \gamma\mathbf{y} = 0\}$ .  $F_\alpha$  et  $F_\beta$  sont alors paramétrés par tout réel  $\lambda$

$$F_\alpha = (\lambda, y_\alpha, -\alpha y_\alpha), \quad F_\beta = \left(\frac{x - s\lambda}{1-s}, y_\beta, -\beta y_\beta\right)$$

où

$$y_\alpha = \frac{1}{s(\beta - \alpha)}(\beta\mathbf{y} + \mathbf{z}), \quad y_\beta = \frac{-1}{(1-s)(\beta - \alpha)}(\alpha\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

On vérifie que si  $A = (a_1, a_2, a_3) \in \Lambda_\gamma$  avec  $\gamma = \alpha, \beta$ , alors

$$\det A = -a_1^2 + \gamma a_2^2,$$

et en utilisant la contrainte de commutativité avec le déterminant, on a

$$\begin{aligned} \det F &= \int_{\mathbf{R}^3} \det A dv(A) = s \int_{\mathbf{R}^3} \det A dv_\alpha(A) + (1-s) \int_{\mathbf{R}^3} \det A dv_\beta(A) \\ &= - \int_{\mathbf{R}^3} a_1^2 dv^{(1)}(A) + s\alpha \int_{\mathbf{R}^3} a_2^2 dv_\alpha^{(2)}(A) + (1-s)\beta \int_{\mathbf{R}^3} a_2^2 dv_\beta^{(2)}(A) \end{aligned}$$

où  $v_\gamma^i$  désigne la projection de  $v_\gamma$  sur la  $i$ -ème composante. Par ailleurs, on réécrit la fonctionnelle sous la forme

$$\int_{\mathbf{R}^3} W(A) dv(A) = \int_{\mathbf{R}^3} a_1^2 dv(A) + s\alpha \int_{\mathbf{R}^3} a_2^2 dv_\alpha(A) + (1-s)\beta \int_{\mathbf{R}^3} a_2^2 dv_\beta(A)$$

faisant apparaître les seconds moments

$$S_1 = \int_{\mathbf{R}^3} a_1^2 dv(A), \quad S_\gamma = \int_{\Lambda_\gamma} a_2^2 dv_\gamma(A), \quad \text{pour } \gamma = \alpha, \beta,$$

contraints, toujours selon l'inégalité de Jensen, par

$$S_1 \geq \mathbf{x}^2, \quad S_\gamma \geq y_\gamma^2 \quad \gamma = \alpha, \beta.$$

En conclusion, le polyconvexifié est obtenu en résolvant le problème de programmation mathématique

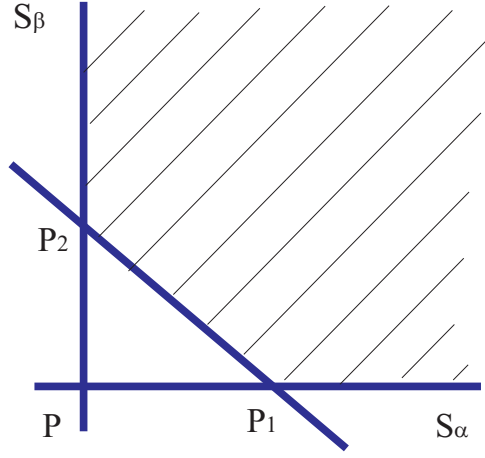
$$\underset{(S_1, S_\gamma, x_\gamma)}{\text{minimiser}} \quad S_1 + s\alpha S_\alpha + (1-s)\beta S_\beta$$

soumis à

$$\begin{aligned} -\det F &= S_1 - s\alpha S_\alpha - (1-s)\beta S_\beta, \\ S_1 &\geq \mathbf{x}^2, S_\gamma \geq y_\gamma^2, \quad \text{pour } \gamma = \alpha, \beta. \end{aligned}$$

On élimine  $S_1$  à partir de l'égalité et on minimise par rapport à  $(S_\alpha, S_\beta)$  seulement sous des contraintes inégalités (voir Figure 2.12 pour la représentation géométrique). Sous les conditions  $a_\alpha \geq -\alpha$  et  $a_\beta \geq -\beta$  supposées dans la sous-section précédente, la valeur optimale dépend des positions relatives de la ligne oblique et du point  $P$ . On introduit la fonction

$$\psi(F, s) = \mathbf{y}\mathbf{z} + \frac{\alpha}{s(\beta - \alpha)^2}(\beta\mathbf{y} + \mathbf{z})^2 + \frac{\beta}{(1-s)(\beta - \alpha)^2}(\alpha\mathbf{y} + \mathbf{z})^2.$$

FIG. 2.12: Région admissible pour les variables  $S_\alpha$  et  $S_\beta$ .

Si  $h(x, t) \geq 0$  et  $\psi(F, s) \leq 0$ , le minimum est atteint en  $P_1$  tel que  $S_\alpha = y_\alpha^2$ ,  $S_1 = x^2$  et vaut

$$\frac{h}{s\beta(\beta - \alpha)^2}(\beta^2 y^2 + z^2 + 2\beta yz) + x^2 - \frac{a_\beta}{\beta} yz.$$

Si  $h(x, t) \leq 0$  et  $\psi(F, s) \leq 0$ , le minimum est atteint en  $P_2$  tel que  $S_\beta = y_\beta^2$ ,  $S_1 = x^2$  et vaut

$$\frac{-h}{(1-s)\alpha(\beta - \alpha)^2}(\alpha^2 y^2 + z^2 + 2\alpha yz) + x^2 - \frac{a_\alpha}{\alpha} yz.$$

Enfin, si  $\psi(F, s) \geq 0$ , le minimum est atteint en  $P$  tel que  $S_\gamma = y_\gamma^2$  et vaut

$$\begin{aligned} -\det F + \frac{1}{s(1-s)(\beta - \alpha)^2} & \left( ((1-s)\beta^2(\alpha + a_\alpha) + s\alpha^2(\beta + a_\beta))y^2 \right. \\ & \left. + ((1-s)(\alpha + a_\alpha) + s(\beta + a_\beta))z^2 + 2((\alpha + a_\alpha)\beta - s\beta)yz \right). \end{aligned}$$

On conclut que la valeur explicite du polyconvexifié est :

$$CPW(F, s) = \begin{cases} \frac{h}{s\beta(\beta - \alpha)^2}(\beta^2 y^2 + z^2 + 2\beta yz) + x^2 - \frac{a_\beta}{\beta} yz & \text{si } h(x, t) \geq 0, \psi(s, F) \leq 0, tr(F) = 0, \\ \frac{-h}{(1-s)\alpha(\beta - \alpha)^2}(\alpha^2 y^2 + z^2 + 2\alpha yz) + x^2 - \frac{a_\alpha}{\alpha} yz, & \text{si } h(x, t) \leq 0, \psi(s, F) \leq 0, tr(F) = 0, \\ \frac{1}{s(1-s)(\beta - \alpha)^2} \left( ((1-s)\beta^2(\alpha + a_\alpha) + s\alpha^2(\beta + a_\beta))y^2 \right. \\ \quad \left. + ((1-s)(\alpha + a_\alpha) + s(\beta + a_\beta))z^2 + 2((\alpha + a_\alpha)\beta - s\beta)yz \right) - \det F & \text{si } \psi(s, F) \geq 0, tr(F) = 0, \\ + \infty & \text{si } tr(F) \neq 0 \end{cases}$$

où  $tr(F)$  désigne la trace de  $F$ . Il reste à étudier si les mesures correspondantes à ce minimum vérifient une condition de rang 1.

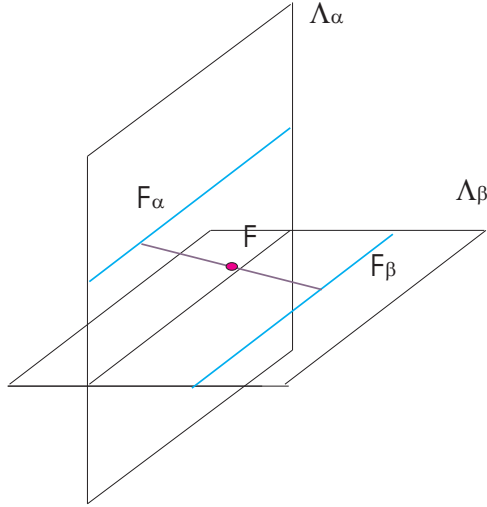
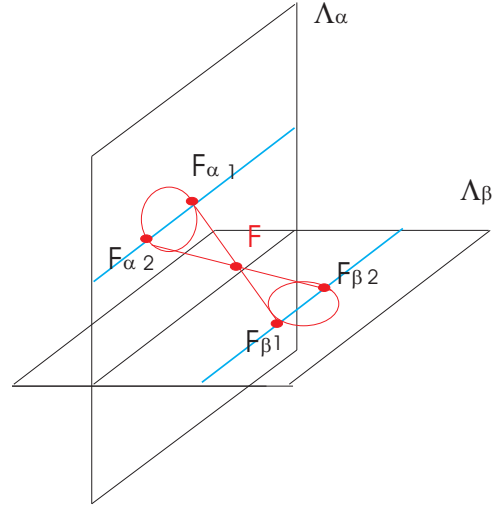

 FIG. 2.13: Décomposition de  $F$ .


FIG. 2.14: Deux laminés d'ordre un.

### Micro-structure optimale sous la forme de laminé

On cherche un laminé de la forme  $v = sv_\alpha + (1-s)v_\beta$ , avec  $\text{supp}(v_\gamma) \subset \Lambda_\gamma$  et de premier moment  $F$ . Il convient d'étudier les différentes conditions d'optimalité selon le signe de  $\psi$ .

Discutons le cas le plus simple où  $\psi(F, s) \geq 0$  conduisant à deux laminés d'ordre 1.  $S_\gamma = y_\gamma^2$  implique, par la stricte convexité de la fonction carrée

$$v_\gamma^{(2)} = \delta_{y_\gamma}, \gamma = \alpha, \beta.$$

Ainsi,

$$(2.5.138) \quad F_\alpha = (\lambda, y_\alpha, -\alpha y_\alpha), \quad F_\beta = \left( \frac{x - s\lambda}{1-s}, y_\beta, -\beta y_\beta \right),$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  arbitraire, ce qui signifie que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on peut écrire  $F$  comme la combinaison convexe de deux matrices de  $\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta$  respectivement et satisfaisant la contrainte de volume (voir Figure 2.13).

L'étape suivante consiste à vérifier qu'il existe au moins un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{rang}(F_\alpha - F_\beta) = 1$ . On écrit que

$$\text{rang}(F_\alpha - F_\beta) = 1 \iff C_{F,s}(\lambda) = 0$$

avec

$$C_{F,s}(\lambda) = -\det F - s(\lambda^2 - \alpha y_\alpha^2) - (1-s) \left( \left( \frac{F_{11} - s\lambda}{1-s} \right)^2 - \beta y_\beta^2 \right)$$

un polynôme de degré deux en  $\lambda$  dont les racines sont

$$\lambda_i = x + (-1)^i \sqrt{\frac{1-s}{s} \psi(F, s)}, \quad i = 1, 2.$$

En conclusion, pour toute paire  $(F, s)$  telle que  $\psi(F, s) \geq 0$ , il existe deux laminés d'ordre 1

$$v = s\delta_{F_{\alpha,i}} + (1-s)\delta_{F_{\beta,i}}, \quad i = 1, 2$$

avec

$$F_{\alpha,i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & F_{\alpha,12} \\ -\alpha F_{\alpha,12} & -\lambda_i \end{pmatrix}, \quad F_{\beta,i} = \begin{pmatrix} \frac{x-s\lambda_i}{1-s} & F_{\beta,12} \\ -\beta F_{\beta,12} & -\frac{x-s\lambda_i}{1-s} \end{pmatrix}$$

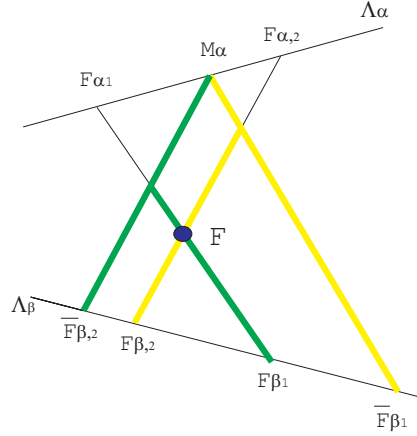


FIG. 2.15: Deux laminés d'ordre deux.

menant à la valeur optimale de  $CPW$  (la figure 2.14 propose un point de vue géométrique - l'intersection entre les variétés  $\Lambda_\gamma$  et le cône de rang 1 est une ellipse dont les intersections avec les  $F_\gamma$  sont deux points  $F_{\gamma,i}$ ).

Le cas  $\psi(s, F) < 0$  conduit à une micro-structure plus fine de 4 laminés d'ordre 2 : cela est représenté géométriquement par la figure 2.15. Les conclusions dans ce cas sont les suivantes (renvoyant à [12] pour les détails) :

– pour  $\psi(F, s) < 0$  et  $h(x, t) \geq 0$ , il existe deux laminés optimaux d'ordre deux,

$$(2.5.139) \quad v_{i,j} = \tau_{i,j} \delta_{F_{\beta,i}} + (1 - \tau_{i,j})(\rho_{i,j} \delta_{\bar{F}_{\beta,j}} + (1 - \rho_{i,j}) \delta_{F_\alpha}), \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

avec les scalaires

$$\rho_{i,j} = \frac{(1-r_j)(r_i-s)}{r_i-r_j}, \quad \tau_{i,j} = \frac{(r_j-s)(r_i-1)}{r_j(1+r_i)+s(1-r_j)}$$

et les matrices

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{\alpha,12} \\ -\alpha F_{\alpha,12} & -F_{11} \end{pmatrix}, \quad F_{\beta,i} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{\beta,12,i} \\ -\beta F_{\beta,12,i} & -F_{11} \end{pmatrix}$$

avec

$$F_{\beta,12,i} = \frac{-1}{(1-r_i)(\beta-\alpha)}(\alpha F_{12} + F_{21}), \quad i = 1, 2$$

$$r_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\beta-\alpha)F_{12}F_{21}}(\alpha\beta|F_{12}|^2 - |F_{21}|^2 + (-1)^i \sqrt{g(F)}) \quad i = 1, 2$$

$$\bar{F}_{\beta,i} = F_\alpha + l_i(F_{\beta,i} - F_{\alpha,i}), \quad l_i = \frac{r_i}{s}.$$

– Pour  $\psi(F, s) < 0$  et  $h(x, t) \leq 0$ , la micro-structure est un autre laminé d'ordre deux donné par

$$v_{i,j} = \tau_{i,j} \delta_{F_{\alpha,i}} + (1 - \tau_{i,j})(\rho_{i,j} \delta_{\bar{F}_{\alpha,j}} + (1 - \rho_{i,j}) \delta_{F_\beta}), \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

avec

$$\rho_{i,j} = \frac{r_j(r_i-s)}{r_i-r_j}, \quad \tau_{i,j} = \frac{(s-r_j)r_i}{r_i(r_j-1)+r_j(1-s)},$$

et

$$F_\beta = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{\beta,12} \\ -\beta F_{\beta,12} & -F_{11} \end{pmatrix}, \quad F_{\alpha,i} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{\alpha,12,i} \\ -\beta F_{\alpha,12,i} & -F_{11} \end{pmatrix}$$

avec

$$F_{\alpha,12,i} = \frac{1}{r_i(\beta-\alpha)}(\beta F_{12} + F_{21}), \quad i = 1, 2$$

$$\bar{F}_{\alpha,i} = F_\beta - l_i(F_{\beta,i} - F_{\alpha,i}), \quad l_i = \frac{1-r_i}{1-s}.$$



### 2.5.3 Simplification de (RP)

L'équation des ondes ayant disparu dans la formule relaxée, celle-ci est bien plus délicate à résoudre numériquement. En adaptant la méthode du cas elliptique de [DP05], il est possible de transformer la formulation (RP) en une formulation plus exploitable.

Puisque la fonction contrainte  $\psi$  ne dépend que de  $F_{21}$  et de  $F_{12}$ , l'idée est de chercher la relation optimale entre ces deux variables. En minimisant par rapport à  $F_{21}$  seulement, il vient :

**Lemme 2.5.4.** *Pour tout  $s$  fixe, la solution du problème quadratique*

$$\text{Minimiser en } F_{21} : \varphi(F, s)$$

*a lieu pour  $\psi(F, s) = 0$ .* ■

On utilise alors la décomposition (2.5.134) de la fonction  $\psi$  pour écrire

$$(2.5.140) \quad CQW(U, F, s) = \begin{cases} |F_{11}|^2 + (a_\alpha s + a_\beta(1-s))|F_{12}|^2 & \text{si } F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^+(s)F_{12} = 0, \\ |F_{11}|^2 + \frac{a_\alpha\beta^2 s + a_\beta\alpha^2(1-s)}{(\alpha(1-s) + \beta s)^2} |F_{12}|^2 & \text{si } F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^-(s)F_{12} = 0, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

permettant d'exprimer la relaxée en fonction seulement de la première colonne de  $F$  (c'est-à-dire de  $(U_t^{(1)}, U_x^{(1)}) = (u_t, u_x)$ , éliminant ainsi la variable auxiliaire  $U^{(2)}$  introduite dans la première étape). On utilise enfin le lemme suivant (prouvé dans [DP05] pour le cas elliptique),

**Lemme 2.5.5.** *Pour tout  $s \in (0, 1)$  et  $0 < \alpha < \beta$ , on a*

$$(2.5.141) \quad \begin{aligned} \frac{a_\beta}{a_\alpha} \leq \frac{2\beta}{\alpha + \beta} &\implies a_\alpha s + a_\beta(1-s) \leq \frac{a_\alpha\beta^2 s + a_\beta\alpha^2(1-s)}{(\alpha(1-s) + \beta s)^2}, \\ \frac{a_\beta}{a_\alpha} \geq \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} &\implies a_\alpha s + a_\beta(1-s) \geq \frac{a_\alpha\beta^2 s + a_\beta\alpha^2(1-s)}{(\alpha(1-s) + \beta s)^2}. \end{aligned}$$

conduisant alors, en revenant à la variable initiale  $u = U^{(1)}$  du problème :

$$(2.5.142) \quad (\widetilde{RP}) \quad \inf_s \tilde{I}(s) = \int_0^T \int_\Omega \left( u_t(t, x)^2 + G_{\alpha,\beta}(s) u_x(t, x)^2 \right) dx dt$$

soumis

$$(2.5.143) \quad \begin{cases} u_{tt} - \nabla_x(\Lambda_{\alpha,\beta}(s)u_x) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ 0 \leq s(t, x) \leq 1, \int_\Omega s(t, x) dx \leq L_\alpha |\Omega| & \text{dans } (0, T) \end{cases}$$

avec

$$(2.5.144) \quad G_{\alpha,\beta}(s) = a_\alpha s + a_\beta(1-s); \quad \Lambda_{\alpha,\beta}(s) = \lambda_{\alpha,\beta}^+(s) = \alpha s + \beta(1-s) \quad \text{si } \frac{a_\beta}{a_\alpha} \leq \frac{2\beta}{\alpha + \beta}$$

et

$$(2.5.145) \quad G_{\alpha,\beta}(s) = \frac{a_\alpha\beta^2 s + a_\beta\alpha^2(1-s)}{(\alpha(1-s) + \beta s)^2}; \quad \Lambda_{\alpha,\beta}(s) = \lambda_{\alpha,\beta}^-(s) = \frac{1}{\alpha^{-1}s + \beta^{-1}(1-s)} \quad \text{si } \frac{a_\beta}{a_\alpha} \geq \frac{\alpha + \beta}{2\alpha}.$$

On suppose désormais que, pour tout  $x$ , on a soit  $a_\beta/a_\alpha \leq 2\beta/(\alpha + \beta)$  soit  $a_\beta/a_\alpha \geq (\alpha + \beta)/2\alpha$ .

**Remarque 2.5.6.** – Le cas *quadratique* pour lequel  $(a_\alpha, a_\beta) = (1, 1)$  conduit à  $h(t, x) = \beta - \alpha > 0$ ,  $a_\beta/a_\alpha \leq 2\beta/(\alpha + \beta)$  et donc à la moyenne arithmétique  $\lambda_{\alpha,\beta}^+$ .  
 – Le cas de la *compliance* pour lequel  $(a_\alpha, a_\beta) = (\alpha, \beta)$  conduit à  $h(t, x) = 0$ ,  $a_\beta/a_\alpha \geq (\alpha + \beta)/2/\alpha$  et à la moyenne harmonique  $\lambda_{\alpha,\beta}^-$ .

■

Cependant, on ne peut pas affirmer, *a priori*, que le problème  $(\widetilde{RP})$  est équivalent au problème  $(RP)$  parce que le couple  $U = (U^{(1)}, U^{(2)})$  qui résout  $(RP)$  ne vérifie pas nécessairement pour tout  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$  la relation  $U_t^{(2)} + U_x^{(1)}(\alpha s + \beta(1 - s)) = 0$  (i.e.  $F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^+(s)F_{12} = 0$ ) ou, pour tout  $(t, x)$  la relation  $U_t^{(2)} + U_x^{(1)}(\alpha^{-1}s + \beta^{-1}(1 - s))^{-1} = 0$  (i.e.  $F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^-(s)F_{12} = 0$ ). Cette équivalence est cependant supportée par le lemme suivant :

**Lemme 2.5.7.** *L'égalité  $\inf(VP) = \inf(\widetilde{RP}) = \min(RP)$  a lieu.*

■

Par ailleurs, puisque  $\psi(F, s) = 0$ , on déduit de l'analyse précédente que la micro-structure est donnée sous la forme de laminés d'ordre 1 :

$$(2.5.146) \quad s(t, x)\delta_\alpha + (1 - s(t, x))\delta_\beta$$

avec direction normale  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  (si  $F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^+(s)F_{12} = 0$ ) ou  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  (si  $F_{21} + \lambda_{\alpha,\beta}^-(s)F_{12} = 0$ ), selon  $x$  dans  $\Omega$ .

**Remarque 2.5.8.** Dans la référence [11], nous avons étudié la combinaison des deux problèmes précédents, consistant à optimiser simultanément la distribution spatio-temporelle du matériau de caractéristique  $\alpha$  sur  $(0, T) \times \omega_1 \subset (0, T) \times \Omega$  et la distribution de la zone de dissipation sur  $\omega_2 \subset \Omega$  :

$$(2.5.147) \quad (P_{\omega_1, \omega_2}) \quad \inf_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + a(t, \mathbf{x}, \mathcal{X}_{\omega_1})|u_x|^2) dx dt$$

soumis

$$(2.5.148) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_{\omega_1} \in L^\infty((0, T) \times \Omega; \{0, 1\}), & \mathcal{X}_{\omega_2} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \\ \int_\Omega \mathcal{X}_{\omega_1}(t, \mathbf{x}) dx \leq L_\alpha |\Omega|, & \forall t \in (0, T), \quad L_\alpha \in (0, 1), \\ \int_\Omega \mathcal{X}_{\omega_2}(\mathbf{x}) dx \leq L_d |\Omega|, & L_d \in (0, 1) \end{cases}$$

où  $u$  est la solution unique de

$$(2.5.149) \quad \begin{cases} u_{tt} - \nabla_x \cdot ([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})]u_x) + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_{\omega_2}u_t = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec les hypothèses précédentes. Quelque soit l'amplitude de la fonction de dissipation  $a$  (et notamment des amplitudes arbitrairement petites), l'analyse du problème conduit à une micro-structure représentée par des **laminés d'ordre 1**. Contrairement au cas précédent ( $a \equiv 0$ ), il n'apparaît pas de laminés d'ordre 2. D'une part, cela illustre l'effet régularisant du terme de dissipation sur la micro-structure optimale. D'autre part, cela conforte la simplification du problème décrite ci-dessus (en d'autres termes, les laminés d'ordre 2, s'ils sont présents, dans le problème  $(P)$ , ont un caractère *instable*). On renvoie à [11] pour les détails et quelques simulations numériques. ■

## 2.5.4 Applications numériques

On illustre ce qui précède par quelques-unes des simulations numériques de [11]. La résolution du problème  $(\widetilde{RP})$  repose sur un algorithme de descente.

**Théorème 2.5.9.** Si  $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , alors la variation première de  $\tilde{I}$  par rapport à  $s$  dans la direction  $s_1$  existe et a pour expression

$$(2.5.150) \quad \frac{\partial \tilde{I}(s)}{\partial s} \cdot s_1 = \int_0^T \int_{\Omega} s_1 \left( (a_{\alpha} - a_{\beta}) u_x^2 + (\alpha - \beta) u_x p_x \right) dx dt$$

où  $u$  est la solution de (2.5.143) et  $p$  la solution dans  $C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  de

$$(2.5.151) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(p_t, -[s\alpha + (1-s)\beta]p_x) = \operatorname{div}(u_t, a(t, \mathbf{x}, s)u_x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ p(T, \mathbf{x}) = 0, \quad p_t(T, \mathbf{x}) = u_t(T, \mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

■

**Remarque 2.5.10.** Il est important de remarquer que la dérivée dépend des gradients de  $u$  et  $p$ , solutions d'équations d'onde dont les coefficients sont seulement dans  $L^{\infty}((0, T) \times \Omega; \mathbb{R}_+^*)$ . L'analyse numérique de ce type de problème semble ouverte. On utilise un élément fini  $C^0$  pour l'approximation en espace et une différence finie centrée usuelle pour l'approximation en temps. Par ailleurs, on ajoute aux formulations un terme de régularisation de la forme

$$(2.5.152) \quad (\beta - \alpha) \varepsilon^2 \operatorname{div}(\Lambda_{\alpha, \beta}(s) u_{xxt})$$

avec  $\varepsilon$  de l'ordre de  $h$ , le paramètre de discrétisation en espace. L'ajout de ce terme permet une décroissance de la fonction coût au cours des itérations. Sans ce terme, des oscillations apparaissent sur la densité  $s$ , se répercutent sur les solutions  $u$  et  $p$ , puis s'amplifient au cours des itérations : l'algorithme diverge alors en quelques itérations. ■

On prend  $\Omega = (0, 1)$ ,  $T = 2$  et on traite le cas quadratique :  $(a_{\alpha}, a_{\beta}) = (1, 1)$ . On montre les densités optimales obtenues dans les deux cas suivants :

$$- \text{Cas 1 : } (u_0(x), u_1(x)) = (\sin(\pi x), 0); \quad \text{Cas 2 : } (u_0(x), u_1(x)) = (\exp^{-80(x-0.5)^2}, 0),$$

selon les valeurs de  $\alpha, \beta$  et  $V_{\alpha}$ . La figure 2.16 représente la densité optimale  $s$  sur  $(0, T) \times \Omega$  pour  $(\alpha, \beta) = (1, 1.1)$  avec  $V_{\alpha} = 0.3$  et  $V_{\alpha} = 0.5$ . Les densités optimales sont des fonctions caractéristiques suggérant que le problème initial est bien posé. Remarquons que la distribution des deux matériaux suit l'évolution des ondes et leurs rebonds sur  $\partial\Omega$ . A nouveau, les résultats sont qualitativement différents lorsque le rapport entre  $\alpha$  et  $\beta$  devient grand : les figures 2.17 décrivent le cas  $(\alpha, \beta) = (1, 6)$  : les densités optimales limites ne sont plus des fonctions caractéristiques et dépendent de l'initialisation. Le second cas conduit à des conclusions similaires, Figure 2.18 et 2.19. Par ailleurs, compte tenu de la dépendance en temps des coefficients, le système (2.5.143) n'est pas conservatif. Les distributions optimales conduisent à un système dissipatif : la figure 2.20 représente l'évolution de l'énergie  $E(t) = \int_{\Omega} (|u_t|^2 + G_{\alpha, \beta}(s)|u_x|^2) dx$  - intégrande de la fonctionnelle relaxée - en fonction du temps.

Nous renvoyons à [11] pour une discussion détaillée dans ce cas quadratique ainsi que pour le cas  $(a_{\alpha}, a_{\beta}) = (\alpha, \beta)$ .

## 2.6 Distribution optimale de deux matériaux : cas de l'équation de la chaleur

De façon similaire - mais utilisant ici une technique différente - il est possible d'aborder le cas de l'équation de la chaleur. Dans la référence [27], nous traitons le problème suivant :

$$(P_t) \quad \text{Minimiser en } \mathcal{X} : \quad J_t(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} K(t, x) \nabla u(t, x) \cdot \nabla u(t, x) dx dt$$

où la variable d'état  $u = u(t, x)$  est la solution de

$$(2.6.153) \quad \begin{cases} (\beta(t, x)u(t, x))' - \operatorname{div}(K(t, x) \nabla u(t, x)) = f(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

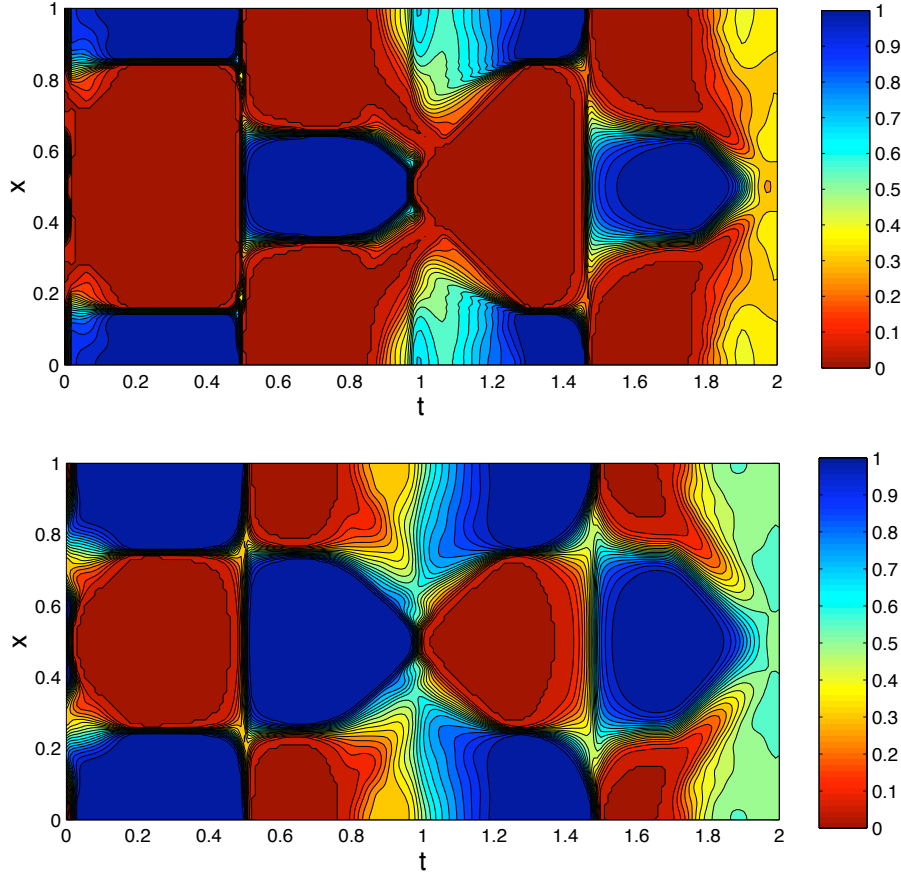


FIG. 2.16: **Cas 1** -  $T = 2$ ,  $(\alpha, \beta) = (1, 1.1)$  - Iso-valeurs de la densité optimale pour  $V_\alpha = 0.3$  (**haut**) [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 9.745$ ] et  $V_\alpha = 0.5$  (**bas**) - [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 9.561$ ].

avec

$$\begin{cases} \beta(t, x) = \mathcal{X}(t, x)\beta_1 + (1 - \mathcal{X}(t, x))\beta_2, \\ K(t, x) = \mathcal{X}(t, x)k_1I_N + (1 - \mathcal{X}(t, x))k_2I_N, \end{cases}$$

et la variable de forme  $\mathcal{X} \in L^\infty((0, T) \times \Omega; \{0, 1\})$  satisfait la condition

$$(2.6.154) \quad \int_{\Omega} \mathcal{X}(t, x) dx = L|\Omega|, \quad t \in (0, T)$$

pour  $L$  fixé dans  $(0, 1)$ . On suppose  $T > 0$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , est un domaine borné composé de deux matériaux homogènes isotropes, de densité de masse  $\rho_i > 0$ , de chaleur spécifique  $c_i > 0$ , et conductivité thermique  $k_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  telles que  $k_1 \neq k_2$ . On pose  $\beta_i = \rho_i c_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $f$  est la source de chaleur (supposée nulle dans [27]) et  $u_0$  la donnée initiale.

### Mesures de Young Div-Rot

A l'image de la section précédente, on réécrit l'équation du système (2.6.153) sous la forme

$$(2.6.155) \quad \operatorname{div}_{(t,x)} [(-\beta(t, x)u(t, x), K(t, x)\nabla u(t, x)) + F(t, x)] = 0$$

où l'opérateur  $\operatorname{div}_{(t,x)}$  inclut la variable de temps  $t$  et où  $F(t, x)$  désigne un champ de vecteurs tel  $\operatorname{div}_{(t,x)} F = f$ . Par simplicité, on prend dans l'analyse  $f = F = 0$ .

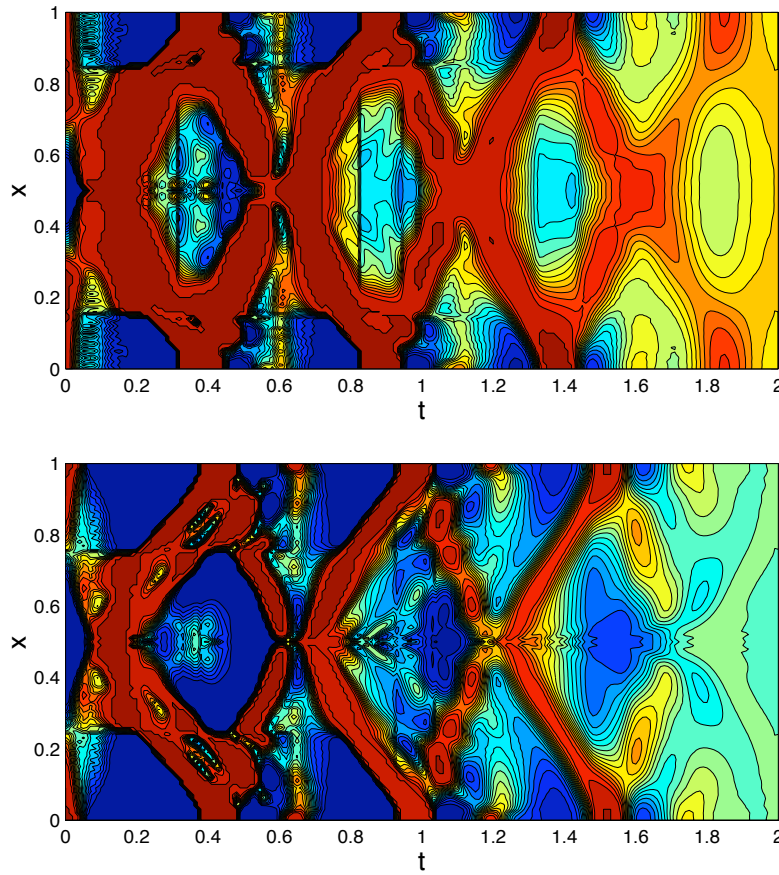


FIG. 2.17: **Cas 1** -  $T = 2$ ,  $(\alpha, \beta) = (1, 6)$  - Iso-valeurs de la densité optimale pour  $V_\alpha = 0.3$  (**haut**) [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 7.956$ ] et  $V_\alpha = 0.5$  (**bas**) - [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 6.143$ ].

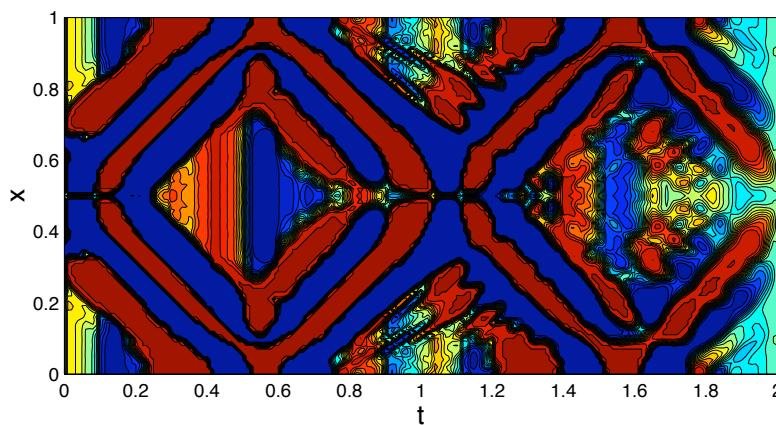
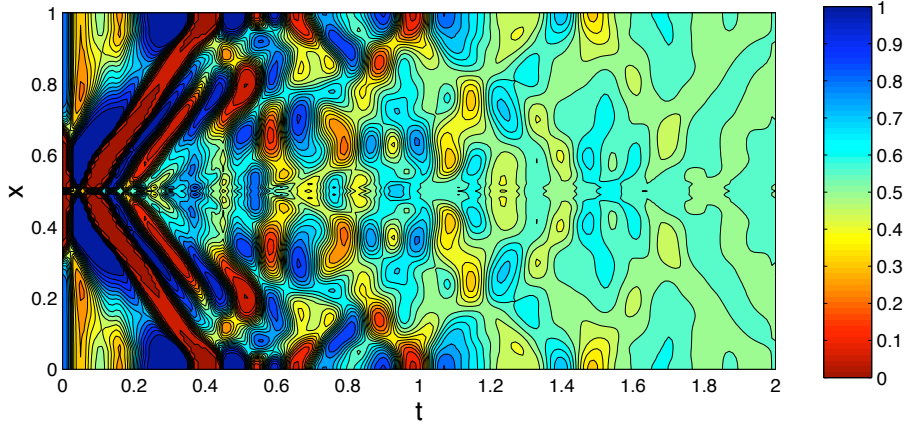
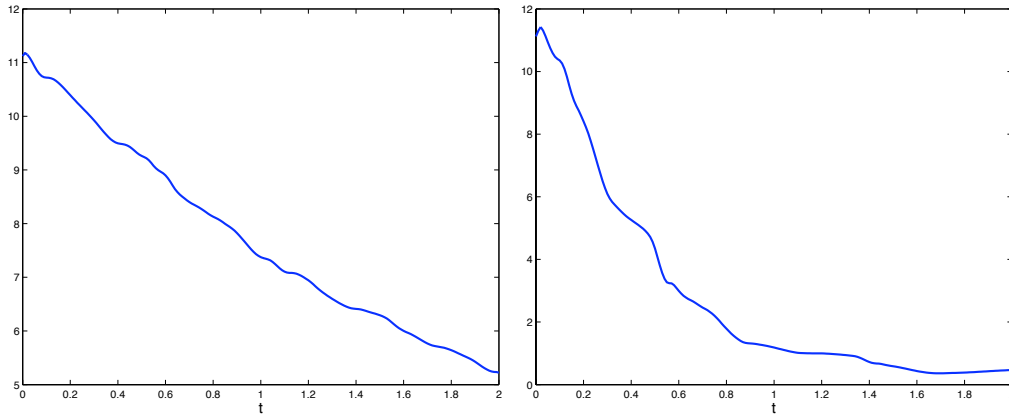


FIG. 2.18: **Cas 2** -  $T = 2$ ,  $(\alpha, \beta) = (1, 1.1)$  - Iso-valeurs de la densité optimale pour  $V_\alpha = 0.5$  [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 15.48$ ].

Pour  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  une *solution intégrale* (ou solution au sens des mesures de Young) de (2.6.155) existe (voir [KP92]) : précisément,

$$u \in L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega)) \quad \text{avec } u' \in L^2((0, T) \times \Omega)$$

est dite une solution intégrale de (2.6.155) si cette équation est satisfaite dans  $H^{-1}((0, T) \times \Omega)$ .


 FIG. 2.19: **Cas 2** -  $T = 2$ ,  $(\alpha, \beta) = (1, 6)$  - Iso-valeurs de la densité optimale pour  $V_\alpha = 0.5$  [ $\tilde{I}(s^{lim}) \approx 4.541$ ].

 FIG. 2.20: **Cas 2** -  $T = 2$  -  $V_\alpha = 0.5$  - Evolution de l'énergie  $E(t)$  en fonction du temps pour  $(\alpha, \beta) = (1, 1.1)$  (**gauche**) et  $(\alpha, \beta) = (1, 6)$  (**droit**).

Soit maintenant  $(X_n)$  une suite de domaines admissibles pour  $(P_t)$  et soit  $(u_n)$  la séquence de solutions intégrales correspondante. Soient enfin les deux champs suivants :

$$(2.6.156) \quad \begin{cases} G_n(t, x) = (-X_n(t, x)\beta_1 + (1 - X_n(t, x))\beta_2)u_n(t, x), & K_n(t, x)\nabla u_n(t, x), \\ H_n(t, x) = (u'_n(t, x), \nabla u_n(t, x)). \end{cases}$$

Puisque  $G_n$  and  $H_n$  sont uniformément bornés dans  $(L^2((0, T) \times \Omega))^{N+1}$ , on peut associer à la paire  $(G_n, H_n)$  une famille de mesures paramétrées  $\nu = \{\nu_{(t,x)}\}_{(t,x) \in (0,T) \times \Omega}$ . Par ailleurs, puisque cette paire  $(G_n, H_n)$  satisfait

$$\operatorname{div}_{(t,x)} G_n = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} H_n = 0,$$

la mesure  $\nu$  est appelée une mesure de Young Div-Rot (voir [Ped07]). Cette classe de mesures satisfait la propriété de commutativité suivante

$$(2.6.157) \quad \int_{\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}} \rho \cdot \lambda \, d\nu_{(t,x)}(\rho, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}} \rho \, d\nu_{(t,x)}(\rho, \lambda) \cdot \int_{\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}} \lambda \, d\nu_{(t,x)}(\rho, \lambda),$$

qui est une conséquence directe du lemme Div-Rot (voir [Tar94]). On note également, en vertu du lemme d'Aubin-Lions, que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2((0, T) \times \Omega).$$

Raisonnant comme dans la section précédente, la forme particulière de  $(G_n, H_n)$  implique que chaque mesure  $\nu_{(t,x)}$  a son support dans l'union de deux ensembles linéaires

$$(2.6.158) \quad \Lambda_i = \left\{ (\rho, \lambda) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} : \rho_1 = -\beta_i u, \quad \bar{\rho} = k_i \bar{\lambda} \right\}, \quad i = 1, 2$$

avec

$$(2.6.159) \quad \rho = (\rho_1; \bar{\rho}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \lambda = (\lambda_1; \bar{\lambda}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Il en résulte que la mesure  $\nu_{(t,x)}$  peut-être écrite sous la forme

$$(2.6.160) \quad \nu_{(t,x)} = \theta(t, x) \nu_{1,(t,x)} + (1 - \theta(t, x)) \nu_{2,(t,x)},$$

avec  $\text{supp } \nu_{i,(t,x)} \subset \Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . La signification des ensembles  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , et en particulier des variables auxiliaires  $(\rho, \lambda)$ , provient du fait que la mesure  $\nu_{(t,x)}$  donne la limite de la distribution de probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$  de la valeur de  $(G_n, H_n)$  près du point  $(t, \mathbf{x})$  (voir [Ped07], chapitre 1).

Si  $\mathcal{X}_n$  est une suite minimisante pour  $(P_t)$  avec la propriété que  $|\nabla u_n|^2$  est équi-intégrable (notons que seules les dérivées spatiales sont impliquées dans la fonctionnelle) alors, de la propriété fondamentale des mesures de Young ([Ped97], Théorème 6.2), on peut représenter la limite de la fonction coût en terme de la mesure  $\nu$ . Précisément,

$$(2.6.161) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_t(\mathcal{X}_n) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ k_1 \theta(t, x) \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\lambda}|^2 d\bar{\nu}_{1,(t,x)}^{(2)} + k_2 (1 - \theta(t, x)) \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\lambda}|^2 d\bar{\nu}_{2,(t,x)}^{(2)} \right] dx dt$$

où  $\bar{\nu}_{i,(t,x)}^{(2)}$ ,  $i = 1, 2$  désigne la projection de  $\nu_{i,(t,x)}$  sur les dernières  $N$ -composantes de  $\mathbb{R}^{N+1}$ . Ainsi, à chaque suite minimisante pour  $(P_t)$ , on associe une mesure de Young Div-Rot optimale. Je renvoie à [27] pour le calcul de cette mesure optimale (voir également la section 2.8 pour ce calcul dans une situation statique un peu plus simple).

### La formulation relaxée

On obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.6.1.** *Supposons que la solution de (2.6.153) possède la régularité*

$$(2.6.162) \quad u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$$

*et dépende continument de la donnée initiale pour la norme correspondante. Alors, le problème variationnel*

$$(RP_t) \quad \text{Minimiser en } (\theta, \bar{G}, u) : \quad \bar{J}_t(\theta, \bar{G}, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ k_1 \frac{|\bar{G} - k_2 \nabla u|^2}{\theta (k_1 - k_2)^2} + k_2 \frac{|\bar{G} - k_1 \nabla u|^2}{(1 - \theta) (k_2 - k_1)^2} \right] dx dt$$

*soumis à*

$$\left\{ \begin{array}{ll} G \in L^2((0, T) \times \Omega; \mathbb{R}^{N+1}), & u \in H^1((0, T) \times \Omega; \mathbb{R}), \\ ((\theta \beta_1 + (1 - \theta) \beta_2) u)' - \text{div } \bar{G} = 0 & \text{dans } H^{-1}((0, T) \times \Omega), \\ u|_{\partial \Omega} = 0 \quad p.p. \quad t \in [0, T], & u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta \in L^\infty((0, T) \times \Omega; [0, 1]), \quad \int_{\Omega} \theta(t, x) dx = L|\Omega| \quad p.p. \quad t \in (0, T). \end{array} \right.$$

*est une relaxation de  $(VP_t)$  au sens suivant :*

(i) *Il existe au moins un minimum pour  $(RP_t)$ ,*

- (ii) l'infimum de  $(VP_t)$  est égal au minimum de  $(RP_t)$ , et  
 (iii) la mesure de Young associée à  $(RP_t)$  (et donc la micro-structure optimale de  $(VP_t)$ ) peut être déterminée sous la forme d'un laminé du premier ordre dont la direction est explicite en terme de la solution optimale de  $(RP_t)$ .

Je renvoie à [27] pour la preuve ainsi que pour des simulations numériques. A la suite de l'analyse des laminés, nous conjecturons (et observons numériquement) notamment que **le domaine optimal est indépendant de la variable  $t$** . Dans [27], nous traitons également le cas où  $X$  est indépendant du temps, en utilisant de façon standard la méthode de l'homogénéisation.

## 2.7 Support optimal du contrôle exact pour l'équation des ondes

Compte tenu de tout ce qui précède, une question qui arrive naturellement est de déterminer la position optimale du contrôle HUM, présenté au premier chapitre, pour l'équation des ondes. Les références [16, 17, 18] traitent le cas de la contrôlabilité exacte interne. Étonnamment, ces notions de contrôlabilité exacte et optimisation semblent avoir été peu, voire pas, abordées jusqu'à présent. Je signale la référence [AL98] établissant quelques relations entre la géométrie du domaine et le support du contrôle frontière.

### 2.7.1 Position du problème - Variation de forme et topologique

Soient  $\Omega$  un domaine Lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $T > 0$ . Dans le contexte de la contrôlabilité interne, on peut déterminer un ouvert  $\omega$  non vide pour lequel il existe un contrôle  $v_\omega \in L^2((0, T) \times \omega)$  tel que la solution  $y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  de

$$(2.7.163) \quad \begin{cases} y_{tt} - \Delta y = v_\omega \chi_\omega, & (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y(0, \cdot), y_t(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \Omega, \end{cases}$$

satisfasse

$$(2.7.164) \quad y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

On introduit

$$(2.7.165) \quad V(y^0, y^1, T) = \{\omega \subset \Omega \text{ tel que (2.7.164) ait lieu}\}$$

qui contient en particulier  $\Omega$ . De même,  $V(y^0, y^1, T)$  contient les domaines qui satisfont la propriété d'optique géométrique. Par ailleurs, si  $\Omega$  est rectangulaire, si les données sont régulières et  $T$  suffisamment grand, tout domaine est dans  $V(y^0, y^1, T)$  (voir [Har90]). On considère alors, pour tout  $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $T > 0$  et  $L \in (0, 1)$ , le problème suivant :

$$(2.7.166) \quad (\mathcal{P}_\omega) : \inf_{\omega \subset V_L(y^0, y^1, T)} J(\mathcal{X}_\omega), \quad \text{où } J(\mathcal{X}_\omega) = \frac{1}{2} \|v_\omega\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2,$$

et  $V_L(y^0, y^1, T) = \{\omega \in V(y^0, y^1, T); |\omega| = L|\Omega|\}$ .

Puisque le contrôle associé au domaine optimal est *a fortiori* un contrôle HUM, ce problème est réduit à déterminer le meilleur contrôle HUM par rapport au domaine  $\omega$  : il s'agit ainsi d'une double optimisation. *A priori* ce problème est délicat en raison de la contrainte  $\omega \in V_L(y^0, y^1, T)$  qui n'est pas explicite. En revanche, l'inconnue de forme étant placée en dehors de l'opérateur de divergence, la recherche d'une formulation relaxée apparaît plus aisée.

D'un point de vue numérique, supposant que le problème est bien posé et ignorant momentanément la contrainte  $\omega \in V(y^0, y^1, T)$ , on calcule à nouveau la variation de  $J_\lambda(\mathcal{X}_\omega) = J(\mathcal{X}_\omega) + \lambda(|\mathcal{X}_\omega|_{L^1(\Omega)} - L|\Omega|)$ , en premier lieu en terme de la dérivée Lagrangienne première du couple  $(y, v_\omega)$ .



**Théorème 2.7.1.** Soient  $\omega \in V(y^0, y^1, T)$  et  $v_\omega$  le contrôle HUM de (2.7.163). Si  $\omega$  est de classe  $C^1(\Omega)$  et  $(y^0, y^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , la dérivée de forme de  $J_\lambda$  est donnée par l'expression suivante :

$$(2.7.167) \quad \frac{\partial J_\lambda(X_\omega)}{\partial \omega} \cdot \theta = \frac{1}{2} \int_\omega \int_0^T (2v_\omega V_\omega + v_\omega^2 \operatorname{div} \theta) dt dx + \lambda \int_\omega \operatorname{div} \theta dx$$

où  $V_\omega$  est le contrôle de norme  $L^2(\omega \times (0, T))$  minimale associé au système :

$$(2.7.168) \quad \begin{cases} Y_{tt} - \Delta Y - \nabla(\operatorname{div} \theta) \cdot \nabla y + \operatorname{div}((\nabla \theta + \nabla \theta^T) \cdot \nabla y) = V_\omega X_\omega, & (0, T) \times \Omega, \\ Y = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (Y(0, \cdot), Y_t(0, \cdot)) = (\nabla y^0 \cdot \theta, \nabla y^1 \cdot \theta), & \Omega, \end{cases}$$

tel que  $Y(T, \cdot) = Y_t(T, \cdot) = 0$  dans  $\Omega$ . ■

Le couple  $(Y, V_\omega)$  est la dérivée Lagrangienne première de  $(y, v_\omega)$  et est solution d'un problème de contrôlabilité exacte (qui a une solution car  $(Y(0, \cdot), Y_t(0, \cdot)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ). L'expression en terme d'une intégrale curviligne est donnée par le

**Théorème 2.7.2.** Soient  $\omega \in V(y^0, y^1, T)$ ,  $v_\omega$  le HUM contrôle pour (2.7.163) et  $\nu$  la normale extérieure à  $\omega$ . Si  $\omega$  est de classe  $C^1(\Omega)$  et si  $(y^0, y^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , la dérivée de forme est donnée par :

$$(2.7.169) \quad \frac{\partial J_\lambda(X_\omega)}{\partial \omega} \cdot \theta = -\frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \int_0^T v_\omega^2(t, \mathbf{x}) dt \theta \cdot \nu d\sigma + \lambda \int_{\partial\omega} \theta \cdot \nu d\sigma.$$

On renvoie à [18] pour les preuves.

**Remarque 2.7.3.** – La dérivée de forme (2.7.169) est indépendante de tout problème adjoint. Cela est dû à la propriété de norme  $L^2(0, T)$ -minimale du contrôle HUM  $v_\omega$ .

– Il résulte de (2.7.169) que l'inclusion  $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \Omega$  implique  $J_0(\omega_2) \leq J_0(\omega_1)$ . En particulier, pour  $\lambda = 0$ , le domaine optimal est  $\omega = \Omega \in V(y^0, y^1, T)$ . Cela justifie la contrainte d'aire. De même, pour  $\omega$  fixe,  $J_0$  est une fonction décroissante de  $T$  (voir [AL98]). ■

De façon similaire, on obtient une dérivée topologique associée à  $J_\lambda$

**Théorème 2.7.4.** Pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  et  $\rho$  tel que  $D(\mathbf{x}_0, \rho) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \rho\} \subset \Omega$ , la fonctionnelle  $J_\lambda$  associée à  $\Omega \setminus D(\mathbf{x}_0, \rho)$  prend l'expression suivante :

$$(2.7.170) \quad J_\lambda(X_{\Omega \setminus D(\mathbf{x}_0, \rho)}) = J_\lambda(X_\Omega) + \pi\rho^2 \left( \frac{1}{2} \int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}_0) dt - \lambda \right) + o(\rho^2)$$

en terme seulement du contrôle HUM  $v_\Omega$  de (2.7.163) supporté sur  $\omega = \Omega$ . Le terme facteur de  $\rho^2$  est la dérivée topologique de  $J_\lambda$  au point  $\mathbf{x}_0$ . ■

Remarquons que dans la formule précédente, la fonctionnelle  $J_\lambda$  est évaluée non pas sur  $D(\mathbf{x}_0, \rho)$  mais sur son complémentaire dans  $\Omega$ . En effet, pour  $\rho$  arbitrairement petit, le triplet  $(\Omega, D(\mathbf{x}_0, \rho), T)$  ne vérifie pas la condition d'optique géométrique (voir Définition 1.2.1).

## 2.7.2 Quelques résultats numériques et relaxation

Les expressions précédentes permettent de mettre en œuvre un algorithme de gradient du type

$$(2.7.171) \quad \omega^{(k+1)} = (I + \eta \theta^{(k)})(\omega^{(k)}), \quad \forall k \geq 0$$

avec

$$(2.7.172) \quad \theta^{(k)} = \left( \frac{1}{2} \int_0^T v_{\omega^{(k)}}^2(t, \mathbf{x}) dt - \lambda^{(k)} \right) \mathbf{v}^k \quad \text{sur } \partial\omega^{(k)},$$

et

$$(2.7.173) \quad \lambda^{(k)} = \frac{1}{2} \int_{\omega^{(k)}} \operatorname{div} \left( \int_0^T v_{\omega^{(k)}}^2(t, \mathbf{x}) dt \mathbf{v}^{(k)} \right) dx \Big/ \int_{\omega^{(k)}} \operatorname{div}(\mathbf{v}^{(k)}) dx.$$

Chaque itération de l'algorithme requiert la résolution d'un problème de contrôlabilité exacte sur  $\omega^{(k)}$  (et donc la minimisation d'une fonctionnelle coercive via un gradient conjugué et les schémas d'approximation uniforme mis au point dans le chapitre précédent).

**Remarque 2.7.5.** Il est crucial de remarquer que si  $\omega^{(k)} \in V(y^0, y^1, T)$ , alors  $\omega^{(k+1)} \in V(y^0, y^1, T)$ , car  $J_\lambda(\mathcal{X}_{\omega^{(k+1)}}) \leq J_\lambda(\mathcal{X}_{\omega^{(k)}}) < +\infty$ . ■

Enfin, on peut utiliser la dérivée topologique et initialiser l'algorithme par

$$(2.7.174) \quad \omega^{(0)} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega, \frac{1}{2} \int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}) dt - \lambda > 0 \right\}$$

où  $\lambda$  est choisi tel que  $\|\mathcal{X}_{\omega^0}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$ . La fonction de niveau  $\psi^0$ , négative sur  $\omega^{(0)}$ , est alors  $\psi^0(\mathbf{x}) = \lambda - 1/2 \int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}) dt$  pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ .

Prenons  $\Omega = (0, 1)^2$  et, arbitrairement, une donnée initiale concentrée au point  $(0.3, 0.3)$

$$(2.7.175) \quad y^0(\mathbf{x}) = e^{-100((x_1-0.3)^2+(x_2-0.3)^2)} \mathcal{X}_\Omega(\mathbf{x}); \quad y^1(\mathbf{x}) = 0,$$

et  $T = 3, L = 1/10$ . En premier lieu, les iso-valeurs de la dérivée  $\mathbf{x} \rightarrow 1/2 \int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}) dt$  sont représentées sur la figure 2.21-gauche. La fonction atteint un maximum global au point  $(0.3, 0.3)$  à l'image de  $y^0$ , et plusieurs maxima locaux, notamment en  $(0.7, 0.7)$ . La figure 2.21-droite représente la frontière de  $\omega^0 = \{\mathbf{x} \in \Omega, -1/2 \int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}) dt + \lambda \leq 0\}$  avec  $\lambda \approx 1.5$  menant à  $|\omega^0| = L|\Omega|$ . Pour  $T = 3$ , on vérifie qu'un tel domaine appartient à  $V(y^0, y^1, T)$  :  $J(\mathcal{X}_{\omega^0}) \approx 5.30 < +\infty$ . Comparons maintenant cette prédiction avec

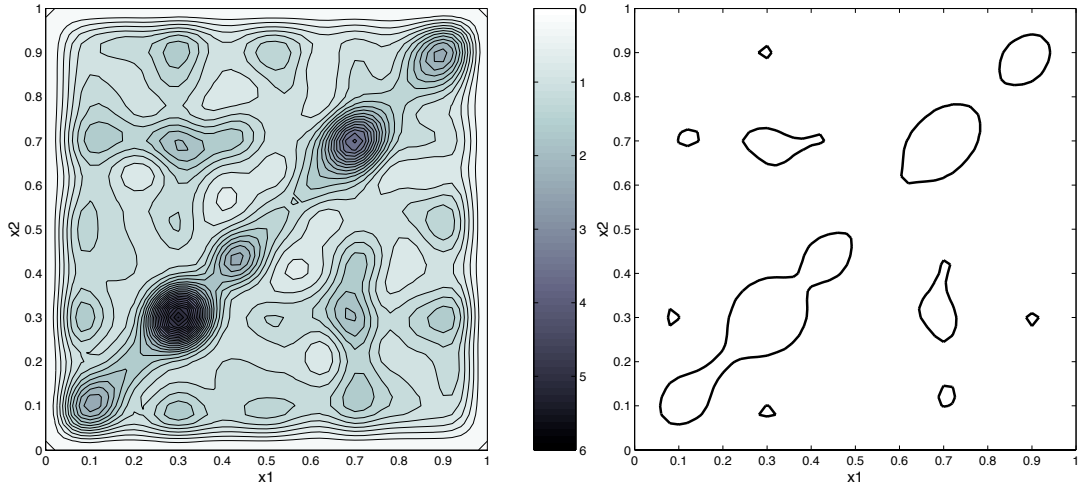


FIG. 2.21:  $T = 3$  - Gauche : Iso-valeurs de  $\int_0^T v_\Omega^2(t, \mathbf{x}) dt$  dans  $\Omega$  - Droite :  $\partial\omega^{(0)} = \{\mathbf{x} \in \Omega, 1/2 \int_0^T (v_\Omega(t, \mathbf{x}))^2 dt - \lambda = 0\}$ ,  $\lambda \approx 1.5$ ,  $\omega^{(0)} \in V(y^0, y^1, T)$ .

la méthode des lignes de niveau. Les figures 2.22 et 2.23 représentent les zéros de la ligne de niveau

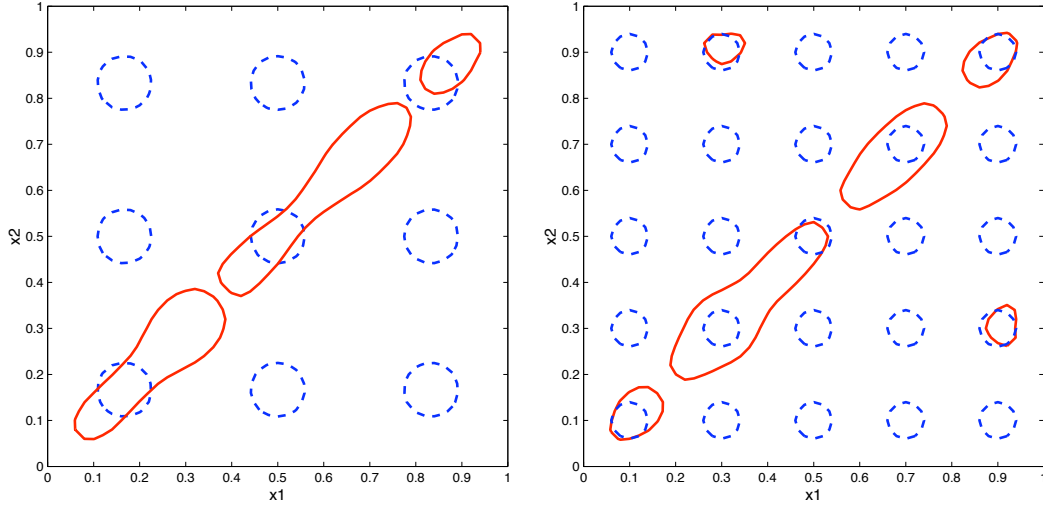


FIG. 2.22:  $T = 3 - \{\mathbf{x} \in \Omega, \psi^{lim}(\mathbf{x}) = 0\} - J(\mathcal{X}_{\omega^{(0)}}) \approx 12.50$ ,  $J(\mathcal{X}_{\omega^{lim}}) \approx 6.42$ .  
 FIG. 2.23:  $T = 3 - \{\mathbf{x} \in \Omega, \psi^{lim}(\mathbf{x}) = 0\} - J(\mathcal{X}_{\omega^{(0)}}) \approx 8.47$ ,  $J(\mathcal{X}_{\omega^{lim}}) \approx 5.07$ .

obtenue après convergence, pour deux initialisations distinctes. Compte tenu de la symétrie de la donnée initiale, les domaines obtenus sont concentrés sur la diagonale du carré unité  $\Omega$ . Il est également intéressant de remarquer (voir figure 2.24) que la minimisation de la norme du contrôle conduit à une réduction du rapport

$$(2.7.176) \quad \frac{\|\phi_{\omega^{(k)}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_{\omega^{(k)}}^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}{\int_{\omega^{(k)}} \int_0^T (\phi_{\omega^{(k)}}(t, \mathbf{x}))^2 dt dx}$$

apparaissant dans l'inégalité d'observabilité où  $\phi$  est la solution du problème adjoint.

Par ailleurs, F. PERIAGO a vérifié récemment dans [Per08] (dans le cas uni-dimensionnel) que l'on obtenait une relaxation bien posée du problème en remplaçant l'espace  $\{\mathcal{X}_{\omega} \in L^{\infty}(\Omega, \{0, 1\}), \|\mathcal{X}_{\omega}\|_{L^1(\omega)} = L|\Omega|\}$  par son enveloppe convexe  $s \in L^{\infty}(\Omega, [0, 1])$ ,  $\|s\|_{L^1(\omega)} = L|\Omega|\}$ . L'auteur démontre directement la semi-continuité inférieure de la fonction coût, sans utiliser les mesures de Young. On considère ainsi le problème  $(\mathcal{CP}_{\omega})$ , convexifié de  $(\mathcal{P}_{\omega})$  a :

$$(2.7.177) \quad (\mathcal{CP}_{\omega}) : \min_{s \in L^{\infty}(\Omega; [0,1])} \bar{J}_{\lambda}(s) \quad \text{avec} \quad \bar{J}_{\lambda}(s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) \int_0^T v_s^2(t, \mathbf{x}) dt dx + \lambda \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) dx$$

où  $v_s$  (fonction de la densité  $s$ ) est telle que  $sv_s$  est le contrôle de norme  $L^2$ -minimale associée à

$$(2.7.178) \quad \begin{cases} y_{tt} - \Delta y = s(\mathbf{x})v_s, & (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y(0, \cdot), y_t(0, \cdot)) = (y^0, y^1), & \Omega. \end{cases}$$

La résolution numérique de ce problème est plus stable : d'une part, la minimisation sur des ouverts est remplacée par la minimisation sur des fonctions. D'autre part - et surtout ! - le contrôle  $s(\mathbf{x})v_s$  agit sur le domaine tout entier, ce qui rend l'approximation numérique bien plus robuste.

Reprenant les données précédentes, la figure 2.25 représente l'évolution de la fonction coût  $\bar{J}(s^k)$  par rapport aux itérations ainsi que le rapport

$$(2.7.179) \quad \frac{\|\phi_{s^k}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_{s^k}^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}{\int_{\Omega} s^k(\mathbf{x}) \int_0^T (\phi_{s^k}(t, \mathbf{x}))^2 dt dx},$$

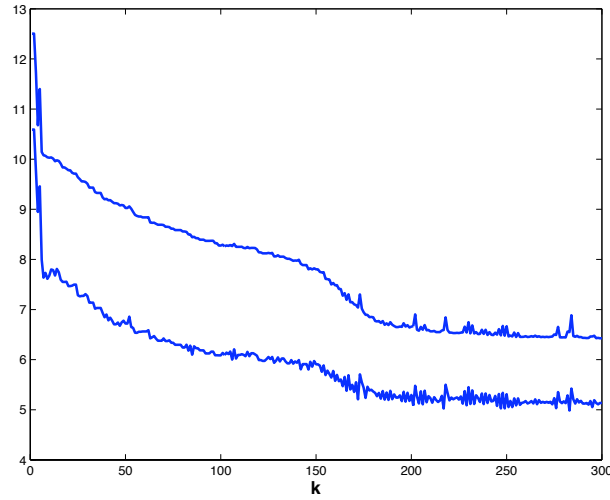


FIG. 2.24:  $T = 3$ - Evolution de  $J_0(\omega^{(k)})$  (**haut**) et du rapport (2.7.176) (**bas**) vs.  $k$ .

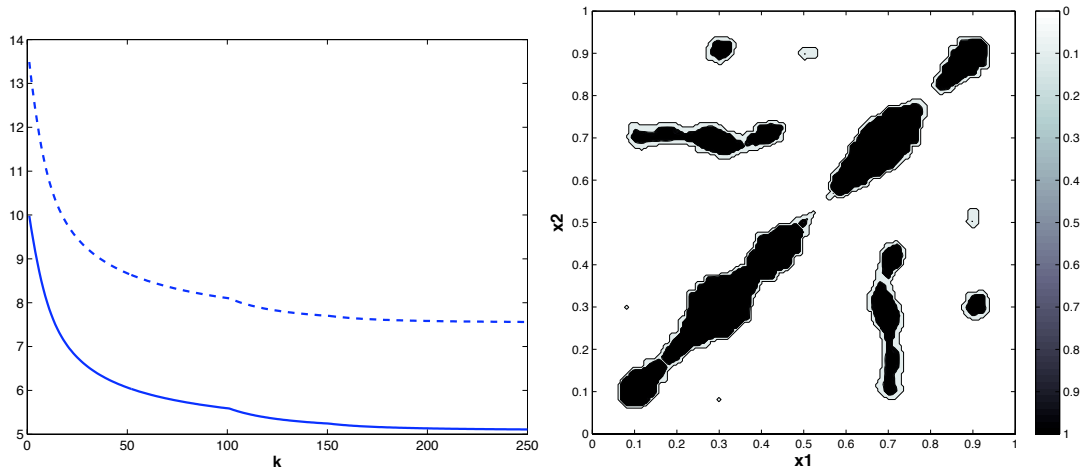


FIG. 2.25:  $T = 3$ -  $\bar{J}_0(s^k)$  (**bas**) et rapport (2.7.179) (**haut**) vs.  $k$ . FIG. 2.26: Iso-valeurs de la densité limite  $s^{lim}$  pour  $T = 3$  initialisée avec  $s^0 = L$  sur  $\Omega = (0, 1)^2$ .

version relaxée de (2.7.176). On obtient une valeur du coût  $\bar{J}(s^{lim}) \approx 4.95$  inférieure à celle obtenue avec la méthode des lignes de niveaux. Par ailleurs, on observe que la densité limite est une fonction caractéristique, suggérant que le problème initial est bien posé.

Naturellement, la position optimale dépend des données, en particulier de  $T$ . La figure 2.27 représente la densité limite, à nouveau dans  $L^\infty(\Omega, \{0, 1\})$  pour  $T = 0.5$  et  $T = 1$ . La position optimale est d'autant plus concentrée autour du point  $(0.3, 0.3)$  que le temps de contrôlabilité est petit.

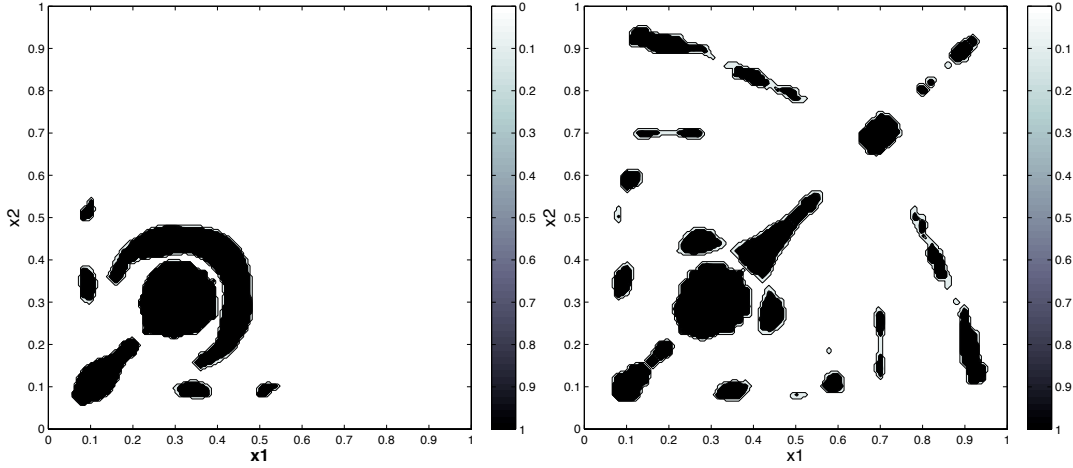


FIG. 2.27: Iso-valeurs de la densité limite  $s^{lim}$  pour  $T = 0.5$  (gauche) et  $T = 1$  (droite), initialisée avec  $s^0 = L$  sur  $\Omega = (0, 1)^2$ .

**Remarque 2.7.6.** Les domaines optimaux ne vérifient pas la propriété d'optique géométrique (non nécessaire ici en raison de la régularité des données et de la géométrie de  $\Omega$ ). Cependant, le support obtenu pour  $T = 0.5$  ne peut observer, en un temps  $T \geq 0.5$ , les ondes partant par exemple du point  $(0.5, 0.5)$  et se dirigeant vers le coin supérieur droit (on rappelle que  $y^0$  est partout non nul). Cela est numériquement dû à la tolérance sur la cible (ici  $E(T)/E(0) \approx 10^{-6}$ ) et au fait que ces ondes correspondent à des niveaux d'énergie très faible. En abaissant cette tolérance, il apparaît des composantes disjointes de  $\omega$  de mesures très faibles (modulo un maillage suffisamment fin permettant de les capturer). Cela est illustré par la figure suivante dans le cas unidimensionnel  $\Omega = (0, 1)$ , avec  $(y^0, y^1) = (e^{-100(x-0.3)^2}, 0)$ ,  $L = 1/15$ . Pour  $T = 0.5$ , le domaine optimal a une composante de mesure très petite centrée en  $x = 1 - T/2 = 0.75$  et qui permet d'observer les composantes se réfléchissant en  $x = 1$ . (Je renvoie à [18] pour plus détails dans le cas unidimensionnel). ■

**Remarque 2.7.7.** Il est intéressant de noter que l'on peut prendre  $T > 0$  et  $|\omega| > 0$  arbitrairement petit. On renvoie également à [18]. ■

## 2.8 Relaxation d'un problème d'optimisation de forme dans le cadre de la mécanique de la rupture

Pour conclure, délaissions maintenant les systèmes dynamiques pour revenir aux sources (voir [20, 21]) de la mécanique de la rupture et discuter d'un problème d'optimisation de forme dans ce cadre. Cela va nous conduire à introduire la notion de *contrôle de propagation de fissure*. A nouveau, on présente une relaxation du problème, puis quelques simulations numériques. On renvoie à [28] en collaboration avec P. PEDREGAL pour les détails.

### 2.8.1 Sur le contrôle de la propagation d'une fissure

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (muni du repère orthonormé direct  $(O; e_1, e_2)$ ) contenant une fissure débouchante  $\gamma$  d'extrémité le point  $F \in \Omega$ . Sans perte de généralité, on suppose que dans un voisinage de  $F$ , la fissure

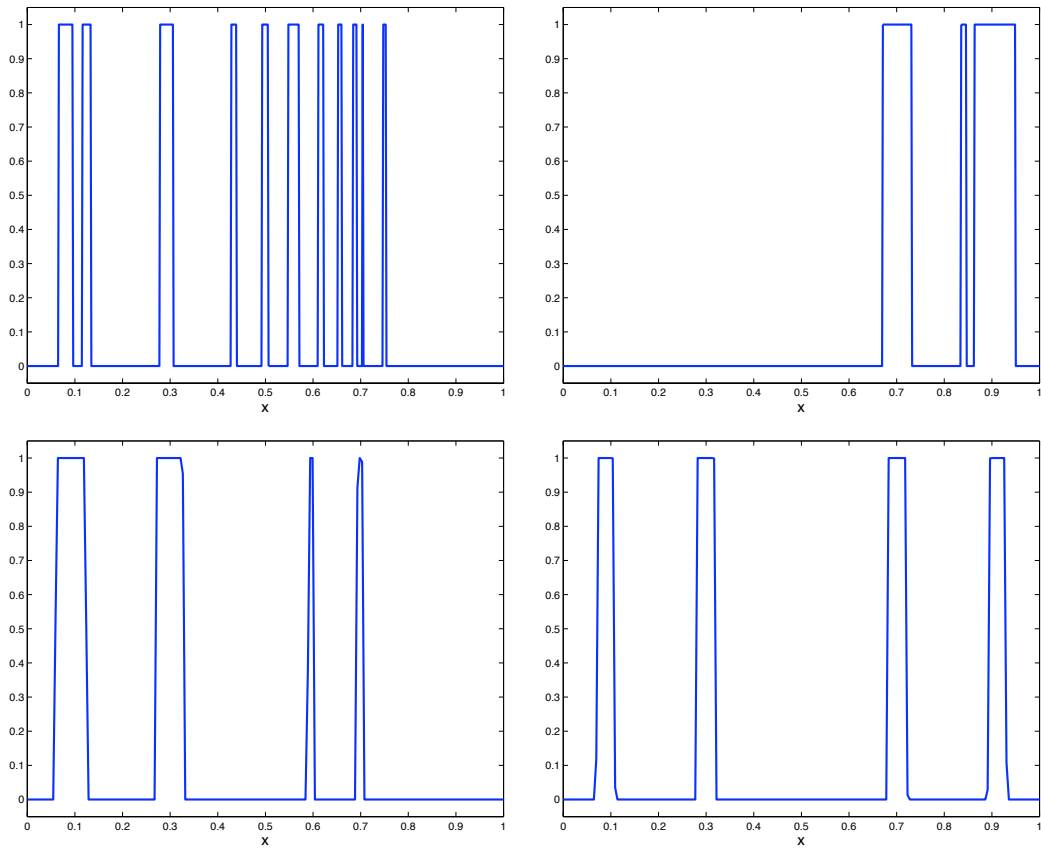


FIG. 2.28: Densité optimale  $s^{lim}$  pour  $T = 0.5$  (**haut gauche**),  $T = 1.5$  (**haut droit**),  $T = 2.5$  (**bas gauche**) and  $T = 3$  (**bas droit**) initialisée avec  $s^0 = L = 0.15$  dans  $\Omega = (0, 1)$ .

est orientée selon l'axe  $(O, \mathbf{e}_1)$ . Le domaine  $\Omega$  est constitué de deux matériaux isotropes de conductivité  $\alpha$  et  $\beta$  ( $0 < \alpha < \beta < \infty$ ) (voir Figure 2.29) : on note

$$(2.8.180) \quad a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x}) = \alpha \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}) + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$$

pour tout  $\omega \subset \Omega$ . Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_g$  deux parties non vides de  $\partial\Omega$  telles que  $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$  et  $\Gamma_g \cap \gamma = \emptyset$ . Pour tout  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  et  $g \in L^2(\Gamma_g)$ , on considère alors (au sens faible) la solution scalaire  $u$  de

$$(2.8.181) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x})\nabla u) = 0 & \Omega, \\ u = u_0 & \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \beta \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g & \Gamma_g \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

On suppose les conditions de transmission parfaites entre les deux phases  $\alpha$  et  $\beta$ . Selon [Gri92],  $u$  possède la régularité  $H^1(\Omega)$ . L'énergie élastique associée est

$$(2.8.182) \quad E(u, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x}) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_g} g u d\sigma.$$

Le système précédent est une modélisation simplifiée scalaire d'une structure  $S$  occupant au repos le domaine  $\Omega$ , fixée sur  $\Gamma_0$ , soumise au chargement normal  $g$  sur  $\Gamma_g$  et contenant une fissure  $\gamma$ . Notre motivation est d'optimiser la distribution des deux matériaux  $\alpha$  et  $\beta$  afin d'empêcher (ou à défaut réduire) la propagation de la pointe de fissure  $\mathbf{F}$ , due au chargement  $g$  et au déplacement imposé  $u_0$ . Dans cette optique, dans le cadre de la mécanique de la rupture (voir [Bui83, Leb03]), on utilise le critère de A.A. GRIFFITH [Gri20] qui postule l'évolution de  $\mathbf{F}$  dès que le taux de restitution de l'énergie  $g_\psi$  (défini comme l'opposé de la variation de  $E$  par rapport à  $\mathbf{F}$ )

$$(2.8.183) \quad g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = \int_{\Omega} a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x}) (A_\psi \nabla u, \nabla u) dx, \quad A_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 2\psi_{1,2} \\ 0 & -\psi_{1,1} \end{pmatrix}$$

excède une valeur critique expérimentale. Le crochet  $(,)$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ . Le critère de Griffith récemment revisité dans [FM98] est global, par opposition aux critères impliquant les contraintes (par exemple les contraintes de Von Mises). La fonction  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, 0) \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})^2$  est à support compact telle que

$$(2.8.184) \quad \psi_1(\mathbf{x}) = 1 \text{ si } \|\mathbf{x} - \mathbf{F}\| \leq r_1, \quad \psi_1(\mathbf{x}) = 0 \text{ si } \|\mathbf{x} - \mathbf{F}\| \geq r_2 \quad (0 < r_1 < r_2).$$

Enfin, on impose que la conductivité  $a_{\mathcal{X}_\omega}$  est constante sur le support de  $\boldsymbol{\psi}$  : on prend,

$$(2.8.185) \quad a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x}) = \beta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \equiv \{\mathbf{x} \in \Omega, \|\mathbf{x} - \mathbf{F}\| \leq r_3\}$$

pour  $r_3$  fixé tel que  $r_3 > r_2$  et  $r_3 \leq \operatorname{dist}(\mathbf{F}, \partial\Omega/\gamma)$ . Remarquons également que la dernière relation de (2.8.181) implique que la conductivité sur  $\Gamma_g$  est égale à  $\beta$ . Pour simplifier l'analyse de la relaxation, on suppose dans la suite que  $\omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ , c'est-à-dire que le matériau de caractéristique  $\alpha$  est strictement interne à la structure.

**Remarque 2.8.1.** – La quantité  $g_\psi$  est l'opposée de la variation première de l'énergie  $E$  par rapport à  $\mathbf{F}$  dans la direction  $\boldsymbol{\psi}$ . A ce titre, sous la condition précédente  $\omega \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ,  $g_\psi$  ne dépend que de la fonction  $\boldsymbol{\psi}$  en fond de fissure. Précisément, en prenant  $r_2$  et  $r_3$  arbitrairement petits, il apparaît le taux de restitution local  $G$  (utilisé par Griffith) tel que

$$(2.8.186) \quad g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = G(u, \mathcal{X}_\omega) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\nu}_F$$

avec  $\boldsymbol{\nu}_F = (\pm 1, 0)$  l'orientation de  $\gamma$  en  $\mathbf{F}$ . On renvoie à [DDL83] pour les détails du calcul de cette variation.

- Dans la pratique, puisque le taux ne dépend que du gradient de la fonction  $\psi_1$ , on prend  $r_2$  suffisamment grand de façon à exprimer  $g_\psi$  hors du point  $\mathbf{F}$  où  $u$  est singulier. Cela permet une approximation robuste de  $g_\psi$ .

■

Afin de réduire le taux dû au chargement  $g$ , on considère ainsi le problème suivant :

$$(2.8.187) \quad (P) : \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega \in \mathcal{X}_L} g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega)$$

où, pour  $L \in (0, 1)$ ,

$$(2.8.188) \quad \mathcal{X}_L = \{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \mathcal{X} = 0 \text{ sur } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|\}$$

et  $u$  solution de (2.8.181).

**Remarque 2.8.2.** – Le taux de restitution est une mesure de la singularité de la solution en  $F$  : précisément, on a la relation  $G(u, \mathcal{X}_\omega) = C(\alpha, \beta)(K_I^2 + K_{II}^2)$  (voir [DDL83]).  $K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte associé au mode I d'ouverture tandis que  $K_{II}$  est celui associé au mode II de cisaillement. Réduire le taux revient donc à réduire la singularité en  $F$ .

- La quantité  $G$  est positive pour tout  $u$  solution de (2.8.181). En revanche, cette quantité n'est pas définie positive (la matrice  $A_\psi$  possède les valeurs propres  $\pm\psi_{1,1}$ ) : le noyau  $\{u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), G(u, \mathcal{X}_\omega) = 0\}$  n'est pas réduit à l'élément nul. A  $u_d$  et  $g$  fixés, déterminer une distribution conduisant à  $u \in \text{Ker } G$  revient à annuler la singularité de  $u$  en  $F$ .

■

De façon surprenante, très peu de travaux ont relié les notions de contrôle et de rupture, la très large majorité d'entre eux s'attachant à décrire la propagation des défauts. Signalons [Des88] où l'auteur considère l'équation des ondes et définit un critère de propagation basé sur les facteurs d'intensité de contraintes, puis dérive ce critère par rapport à un contrôle frontière. De même, la référence [Des89] concerne le cas statique et suggère l'approximation numérique d'une loi de contrôle restreignant la propagation d'une fissure (voir [Des90a] pour le traitement numérique). Plus récemment, signalons [NBSS06] qui annule la singularité (et donc le taux de restitution) en appliquant des chargements supplémentaires - de support distinct de  $\Gamma_g$  - singuliers.

Dans la suite, on présente une relaxation du problème (P). L'originalité de la fonction coût que fournit ce contexte de la mécanique de la rupture réside dans le fait que la matrice  $A_\psi$  n'est pas définie positive et est à coefficients variables (par opposition par exemple au problème standard de la compliance).

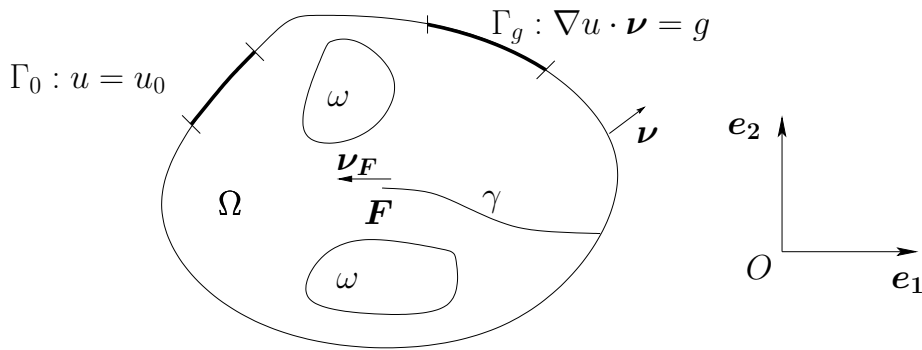


FIG. 2.29: Illustration du problème (P) - Optimisation de la distribution des deux matériaux de caractéristique  $\alpha$  et  $\beta$  supporté sur  $\omega \subset \Omega$  et  $\Omega/\omega$  respectivement.

### 2.8.2 Relaxation et mesure Div-Rot

A nouveau, le problème (P), qui implique la minimisation d'une fonctionnelle dépendant du gradient de  $u$ , est *a priori* mal posé sur  $L^\infty(\Omega, \{0, 1\})$ . Adoptant la procédure décrite dans [Ped07], on obtient une relaxation à partir des mesures de Young générées par une suite de couple  $\{G_n, H_n\}$ , associée à la variable



$\mathcal{X}_{\omega_n}$  admissible pour  $(P)$ , pour laquelle la divergence de la première composante s'annule tandis que la seconde est un gradient. Dans notre situation, on note  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  la mesure div-rot associée à la suite de composante :

$$(2.8.189) \quad G_n(\mathbf{x}) = (\alpha \mathcal{X}_n + \beta(1 - \mathcal{X}_n)) \nabla u_n(\mathbf{x}), \quad H_n(\mathbf{x}) = \nabla u_n(\mathbf{x}).$$

Puisque  $G_n$  provient de l'équation d'état, chaque mesure individuelle  $\nu_x$  est supportée dans l'union de deux ensembles linéaires

$$(2.8.190) \quad \Lambda_\gamma = \{(\lambda, \rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \rho = \gamma \lambda\}, \quad \gamma = \alpha, \beta$$

tels que  $\text{supp}(\nu_x) \subset \Lambda_\alpha \cup \Lambda_\beta$ . De façon usuelle, la mesure  $\nu_x$  est écrite sous la forme

$$(2.8.191) \quad \nu_x = s(\mathbf{x}) \nu_{x,\alpha} + (1 - s(\mathbf{x})) \nu_{x,\beta}$$

avec  $\text{supp}(\nu_{x,\gamma}) \subset \Lambda_\gamma$  et  $s(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ , la limite faible étoile dans  $L^\infty(\Omega)$  de la suite  $\mathcal{X}_{\omega_n}$ . Si maintenant  $(\mathcal{X}_{\omega_n})_{(n>0)}$  est une suite minimisante pour  $(P)$ , alors en vertu de la propriété fondamentale des mesures de Young (voir [Ped97], Théorème 6.2), on peut représenter la limite de la fonction coût associée en terme de la mesure  $\nu$  : précisément, de la relation  $(A_\psi \nabla u, \nabla u) = A_\psi \otimes (\nabla u \nabla u^T)$ , cette limite est

$$(2.8.192) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_\psi(u_n, \mathcal{X}_{\omega_n}) = \int_\Omega \left[ \alpha s(\mathbf{x}) A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \lambda^T d\nu_{x,\alpha}^{(1)}(\lambda) + \beta(1 - s(\mathbf{x})) A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \lambda^T d\nu_{x,\beta}^{(1)}(\lambda) \right] dx$$

où  $\nu_{x,\gamma}^{(1)}$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$ , désigne la projection de  $\nu_{x,\lambda}$  sur la première composante de  $\mathbb{R}^2$ . A chaque suite de  $(P)$ , on associe une mesure optimale : de cette façon, l'optimisation par rapport à  $\mathcal{X}_{\omega_n}$  est équivalente à l'optimisation par rapport à  $\nu$ .

La procédure reste immuable : on associe un problème variationnel équivalent  $(VP)$ . On introduit les fonctions (qui ne sont pas de Carathéodory)

$$(2.8.193) \quad W(\mathbf{x}, \rho, \lambda) = \begin{cases} \alpha A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \lambda \lambda^T & \text{si } (\rho, \lambda) \in \Lambda_\alpha, \\ \beta A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \lambda \lambda^T & \text{si } (\rho, \lambda) \in \Lambda_\beta, \\ + \infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad V(\rho, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho, \lambda) \in \Lambda_\alpha, \\ 0 & \text{si } (\rho, \lambda) \in \Lambda_\beta, \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\Lambda_\gamma = \{(\rho, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \rho = \theta \lambda\}$  puis on vérifie que  $(P)$  est équivalent à

$$(2.8.194) \quad (VP) : \quad \inf_{G,u} \int_\Omega W(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) dx$$

soumis à

$$(2.8.195) \quad \begin{cases} G \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2), \text{ div } G = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}), G(\mathbf{x}) = \beta \nabla u(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \\ u = u_0 \text{ sur } \Gamma_0, \beta \nabla u \cdot \nu = g \text{ sur } \Gamma_g \subset \partial\Omega \setminus (\gamma \cup \Gamma_0), \int_\Omega V(G(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) dx = L|\Omega|. \end{cases}$$

L'étape cruciale est alors le calcul du quasi-convexifié  $CQW$  - pour tout  $s \in L^\infty(\Omega, [0, 1])$  tel que  $s = 0$  dans  $\mathcal{D} \cap \partial\Omega$  et  $\int_\Omega s(\mathbf{x}) dx = L|\Omega|$  - défini par le problème en mesure :

$$(2.8.196) \quad CQW(s(\mathbf{x}), G(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = \inf_\nu \left\{ \alpha s(\mathbf{x}) A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \lambda^T d\nu_{x,\alpha}^{(1)}(\lambda) + \beta(1 - s(\mathbf{x})) A_\psi(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \lambda^T d\nu_{x,\beta}^{(1)}(\lambda) \right\}$$

pour toute mesure de Young Div-Rot  $\nu$  soumise à

$$(2.8.197) \quad \begin{cases} \nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}, \nu_x = s(\mathbf{x}) \nu_{x,\alpha} + (1 - s(\mathbf{x})) \nu_{x,\beta}, \text{ supp}(\nu_{x,\theta}) \subset \Lambda_\theta, \theta = \alpha, \beta, \\ G(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho d\nu_x(\lambda, \rho), \text{ div } G = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \nabla u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda d\nu_x(\lambda, \rho). \end{cases}$$

A nouveau, on introduit les premiers moments de toute mesure  $\nu$ ,

$$(2.8.198) \quad (\lambda, \rho) = \int_{\Lambda} (x, y) d\nu(x, y) = s \int_{\mathbb{R}^2} (x, \alpha x) d\nu_{\alpha}^{(1)}(x) + (1-s) \int_{\mathbb{R}^2} (x, \beta x) d\nu_{\beta}^{(1)}(x)$$

où  $\nu_{\gamma}^{(1)}$  est la projection de  $\nu_{\gamma}$  sur la première composante  $\mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Comme précédemment, on note

$$(2.8.199) \quad \lambda_{\gamma} = \int_{\mathbb{R}^2} x d\nu_{\gamma}^{(1)}(x),$$

et de  $\lambda = s\lambda_{\alpha} + (1-s)\lambda_{\beta}$ ,  $\rho = s\alpha\lambda_{\alpha} + (1-s)\beta\lambda_{\beta}$ , on obtient

$$(2.8.200) \quad \lambda_{\alpha} = \frac{1}{s(\beta - \alpha)}(\beta\lambda - \rho), \quad \lambda_{\beta} = \frac{1}{(1-s)(\beta - \alpha)}(\rho - \alpha\lambda).$$

Par rapport au cas de la compliance, la nouveauté est l'apparition des variables

$$(2.8.201) \quad X_{\gamma} = \int_{\mathbb{R}^2} xx^T d\nu_{\gamma}^{(1)}(x), \quad \gamma = \alpha, \beta$$

combinaison convexe de matrices symétriques de rang 1. Les contraintes sont (en vertu de l'inégalité de Jensen)

$$(2.8.202) \quad X_{\gamma} \geq \lambda_{\gamma} \lambda_{\gamma}^T, \quad \gamma = \alpha, \beta$$

c'est-à-dire que  $X_{\gamma} - \lambda_{\gamma} \lambda_{\gamma}^T$  est semi-défini positif, et aboutissent à la résolution d'un problème de programmation mathématique explicité dans [23] : sa résolution conduit au polyconvexifié (borne inférieure du quasi-convexifié) suivant :

**Proposition 2.8.3.** *Pour tout  $s \in L^{\infty}(\Omega)$  et  $(\lambda, \rho) = (\nabla u, G)$  satisfaisant (2.8.195),*

$$(2.8.203) \quad m(s, \lambda, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{\psi_{1,1}^2 + \psi_{1,2}^2} (\rho \cdot \lambda - \alpha s |\lambda_{\alpha}|^2 - \beta (1-s) |\lambda_{\beta}|^2) \right. \\ \quad + \psi_{1,1} (\alpha s \lambda_{\alpha,1}^2 + (1-s) \beta \lambda_{\beta,1}^2) - \psi_{1,1} (\alpha s \lambda_{\alpha,2}^2 + (1-s) \beta \lambda_{\beta,2}^2) \\ \quad \left. + 2\psi_{1,2} (\alpha s \lambda_{\alpha,1} \lambda_{\alpha,2} + (1-s) \beta \lambda_{\beta,1} \lambda_{\beta,2}) \right] & \text{si } B \geq 0 \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $B = \rho \cdot \lambda - \alpha s |\lambda_{\alpha}|^2 - \beta (1-s) |\lambda_{\beta}|^2$ , est une borne inférieure de CQW :

$$(2.8.204) \quad m(s, \lambda, \rho) \leq CQW(s, \lambda, \rho).$$

$\lambda_{\gamma} = \lambda_{\gamma}(s, \lambda, \rho)$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$  sont donnés par (2.8.200). ■

Il résulte de l'analyse que les seconds moments optimaux sont de la forme

$$(2.8.205) \quad X_{\gamma} = \lambda_{\gamma} \lambda_{\gamma}^T + a_{\gamma}^2 \begin{pmatrix} \psi_{1,2}^2 & -\psi_{1,2} (\psi_{1,1} + \sqrt{\psi_{1,1}^2 + \psi_{1,2}^2}) \\ -\psi_{1,2} (\psi_{1,1} + \sqrt{\psi_{1,1}^2 + \psi_{1,2}^2}) & (\psi_{1,1} + \sqrt{\psi_{1,1}^2 + \psi_{1,2}^2})^2 \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à montrer que cette borne inférieure est atteinte par au moins une mesure Div-Rot. Cette propriété est ici immédiate compte tenu du fait que le domaine  $\omega$  est disjoint du support de la fonction  $\psi$ . Précisément, la densité  $s$  est constante égale à 1 sur  $\mathcal{D}$ . La recherche de laminés (c'est-à-dire de la micro-structure optimale) n'a donc de sens que sur  $\Omega/\mathcal{D}$  où  $\psi_1$  est nulle. Cela entraîne que

$$(2.8.206) \quad X_{\gamma} = \lambda_{\gamma} \lambda_{\gamma}^T, \quad x \in \Omega/\mathcal{D}$$

c'est-à-dire en particulier

$$(2.8.207) \quad X_{\gamma,ii} = \int_{\mathbb{R}} x_i^2 d\nu_{\gamma}^{(1,i)}(x_i) = \left( \int_{\mathbb{R}} x_i d\nu_{\gamma}^{(1,i)}(x_i) \right)^2 = (\lambda_{\gamma,i})^2, \quad i = 1, 2$$

puisque selon Jensen,  $\nu_{\gamma}^{(1,i)} = \delta_{\lambda_{\gamma,i}}$ , i.e.

$$(2.8.208) \quad \nu_{\alpha}^{(1,i)} = \delta_{\frac{\beta\lambda_i - \rho_i}{s(\beta-\alpha)}}, \quad \nu_{\beta}^{(1,i)} = \delta_{\frac{\rho_i - \alpha\lambda_i}{(1-s)(\beta-\alpha)}}.$$

Cela est compatible avec la condition  $X_{\gamma,12} = \lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2}^T$ . Enfin, il en résulte l'égalité

$$(2.8.209) \quad B = \lambda \cdot \rho - \alpha s |\lambda_{\alpha}|^2 - \beta(1-s) |\lambda_{\beta}|^2 = 0.$$

En conclusion, la valeur optimale  $m(s, \lambda, \rho)$  est obtenue par la mesure

$$(2.8.210) \quad \nu = s\delta_{(\alpha\lambda_{\alpha}, \lambda_{\alpha})} + (1-s)\delta_{(\beta\lambda_{\beta}, \lambda_{\beta})}$$

laminé (div-rot) d'ordre 1 : la condition div-rot  $(\beta\lambda_{\beta} - \alpha\lambda_{\alpha}) \cdot (\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}) = 0$  (analogue à une condition de rang 1 pour les  $H^1$ -gradient mesures de Young) étant précisément équivalente à  $B = 0$ . Remarquant que  $B = 0$  prend la forme

$$(2.8.211) \quad (\rho - \lambda^-(s)\lambda) \cdot (\rho - \lambda^+(s)\lambda) = 0$$

(où apparaissent à nouveau les moyennes harmonique et arithmétique), on arrive à la relaxation suivante :

**Théorème 2.8.4.** *Le problème variationnel*

$$(2.8.212) \quad (RP) : \quad \min_{s,u,G} \int_{\Omega} F(s, \nabla u, G) dx$$

soumis à

$$(2.8.213) \quad \begin{cases} s \in L^{\infty}(\Omega, [0, 1]), s = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \int_{\Omega} s(x) dx = L|\Omega|, \\ u \in H^1(\Omega), u = u_0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \beta \nabla u \cdot \nu = g \text{ sur } \Gamma_g, \\ G \in (L^2(\Omega))^2, \text{ div } G = 0 \text{ faiblement dans } \Omega, \\ (G - \lambda^-(s)\nabla u) \cdot (G - \lambda^+(s)\nabla u) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

où  $F$  est défini

$$(2.8.214) \quad F(s, \lambda, \rho) = \frac{1}{2} \left[ \psi_{1,1}(\alpha s \lambda_{\alpha,1}^2 + (1-s)\beta \lambda_{\beta,1}^2) - \psi_{1,1}(\alpha s \lambda_{\alpha,2}^2 + (1-s)\beta \lambda_{\beta,2}^2) \right. \\ \left. + 2\psi_{1,2}(\alpha s \lambda_{\alpha,1} \lambda_{\alpha,2} + (1-s)\beta \lambda_{\beta,1} \lambda_{\beta,2}) \right]$$

est une relaxation de (VP) dans le sens où le minimum de (RP) existe, est égal à l'infimum de (VP). De plus, les mesures de Young associées à (RP) sous la forme de laminés d'ordre 1 dont la direction de lamination est explicitement donnée en terme de la solution optimale  $(u, G)$  : la normale est parallèle au vecteur  $\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}$ .

■

### 2.8.3 Une transformation finale originale - Applications numériques

#### Transformation finale

(RP) est un problème de minimisation avec contrainte sur un ensemble convexe. A nouveau, l'équation d'état en  $u$  (2.8.181) a disparu, rendant la résolution numérique non triviale. Afin de contourner cette difficulté, remarquons que la relation (2.8.211) est équivalente à

$$(2.8.215) \quad \left| \rho - \frac{\lambda^+(s) + \lambda^-(s)}{2} \lambda \right|^2 = \left( \frac{\lambda^+(s) - \lambda^-(s)}{2} \right)^2 |\lambda|^2.$$

Ainsi, en introduisant la variable  $t(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$  de norme 1, on peut écrire  $\rho = G(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$  sous la forme (on utilise que  $\lambda^-(s) \leq \lambda^+(s)$  pour  $s \in (0, 1)$ )

$$(2.8.216) \quad \rho = \frac{\lambda^+(s) + \lambda^-(s)}{2} \lambda + \frac{\lambda^+(s) - \lambda^-(s)}{2} |\lambda| t \equiv \phi(s, t, \lambda).$$

On a

$$(2.8.217) \quad \frac{\lambda^+(s) + \lambda^-(s)}{2} = \frac{2\alpha\beta + s(1-s)(\beta - \alpha)^2}{2(\alpha(1-s) + \beta s)} \equiv A(s),$$

et

$$(2.8.218) \quad \frac{\lambda^+(s) - \lambda^-(s)}{2} = \frac{s(1-s)(\beta - \alpha)^2}{2(\alpha(1-s) + \beta s)} \equiv B(s).$$

La relation  $\operatorname{div} G = 0$  permet alors de redéfinir  $u$  comme la solution d'une équation *non linéaire* à divergence nulle (rappelons que  $\lambda = \nabla u$ ) :

$$(2.8.219) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A(s)\nabla u + B(s)|\nabla u|t) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \beta \nabla u \cdot \mathbf{v} = g, & \text{sur } \Gamma_g. \end{cases}$$

On suppose que cette équation elliptique non standard est bien posée dans un espace convenable. Remarquons que la partie non linéaire est nulle si  $s$  est une fonction caractéristique. Dans un tel cas, (2.8.219) n'est rien d'autre que (2.8.181). En conclusion, la relaxation précédente est équivalente à la suivante, plus aisée à résoudre numériquement, malgré la formulation non linéaire en  $u$  :

**Théorème 2.8.5.** Soient  $F$  et  $\phi$  définis par (2.8.214) et (2.8.216). Le problème

$$(2.8.220) \quad (\underline{RP}) : \quad \min_{s,t} I(s, t) = \int_{\Omega} F(s, \nabla u, \phi(s, t, \nabla u)) dx$$

soumis à

$$(2.8.221) \quad \begin{cases} s \in L^\infty(\Omega, [0, 1]), s = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) dx = L|\Omega|, \\ t \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad |t| = 1, \\ u \in H^1(\Omega), \quad u = u_0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \beta \nabla u \cdot \mathbf{v} = g \text{ sur } \Gamma_g, \\ \operatorname{div} \phi(s, t, \nabla u) = 0 \text{ faiblement dans } \Omega \end{cases}$$

est équivalent à (RP). ■

**Remarque 2.8.6.** L'introduction de la variable auxiliaire  $t$  n'est pas propre à ce problème de rupture. Cela peut être également effectué dans la section 2.5 où  $\psi(s, F) = 0$  est équivalent à (2.8.211). De même, la condition  $\psi(s, F) \geq 0$  entraîne la condition plus générale  $|t| \leq 1$  (voir [Ped07]). ■

**Remarque 2.8.7.** Utilisant que  $s$  est identiquement nulle sur  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ , la fonction  $F$  se simplifie. De (2.8.200) et (2.8.216), il vient  $\lambda_\gamma$  en terme de  $\lambda$ ,  $s$  et  $t$  :

$$(2.8.222) \quad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= \frac{2\beta - (1-s)(\beta - \alpha)}{2(\alpha + s(\beta - \alpha))} \lambda - \frac{(1-s)(\beta - \alpha)}{2(\alpha + s(\beta - \alpha))} |\lambda| t, \\ \lambda_\beta &= \frac{s(\beta - \alpha) + 2\alpha}{2(\alpha + s(\beta - \alpha))} \lambda + \frac{s(\beta - \alpha)}{2(\alpha + s(\beta - \alpha))} |\lambda| t, \end{aligned}$$

puis

$$(2.8.223) \quad F(0, \lambda, \phi(0, t, \lambda)) = \frac{1}{2} \beta \psi_{1,1} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \beta \psi_{1,2} \lambda_1 \lambda_2.$$

Puisque  $s = 0$  dans  $\{\mathbf{x} \in \Omega, \psi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ , on déduit que (prenant  $\lambda = \nabla u$ )

$$(2.8.224) \quad F(s, \nabla u, \phi(s, t, \nabla u)) = \frac{1}{2} \beta \psi_{1,1}(u_{,1}^2 - u_{,2}^2) + \beta \psi_{1,2} u_{,1} u_{,2}$$

qui coïncide avec l'intégrande de  $g_\psi$ . **La relaxation de (P) est seulement apparente dans l'équation non linéaire (2.8.219).** ■

### Applications numériques

On résout la formulation (RP) par une méthode de gradient. A l'itération  $k$ , on détermine  $u^{(k)}$  solution de (2.8.219) par une méthode de Newton

$$(2.8.225) \quad \begin{cases} u^0 \in H^1(\Omega), u^0 = u_0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \int_{\Omega} \left( A(s^{(k)}) \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v + B(s^{(k)}) \frac{\nabla u^{n+1} \cdot \nabla u^n}{|\nabla u^n|} t^{(k)} \cdot \nabla v \right) dx = \int_{\Gamma_g} g v \, d\sigma, \forall n > 0, \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \end{cases}$$

et  $H_{\Gamma_0}^1$  est approché par l'espace de dimension finie

$$(2.8.226) \quad H_{\Gamma_0,h}^1(\Omega) = \{v_h, v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_h|_Q \in Q_1(Q), \forall Q \in \mathcal{Q}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

A nouveau, pour simplifier, on considère le carré unité contenant la fissure ouverte  $\gamma = [0.5, 1] \times \{1/2\}$ . La pointe de fissure est  $\mathbf{F} = (1/2, 1/2)$ .  $\Gamma_0$  est divisé en deux parties  $\Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} : \Gamma_{0,1} = \{0\} \times [0, 1] = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0, x_2 \in [0, 1]\}$  où  $u_0 = 0$  et  $\Gamma_{0,2} = \{1\} \times [0.5, 0.8]$  où  $u_0 = 0.5$ . Il n'y a pas de chargement normal :  $\Gamma_g = \emptyset$ . Par ailleurs, de façon à limiter la taille de  $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \Omega, \|\mathbf{x} - \mathbf{F}\| \leq r_3\}$  où la conductivité est imposée égale à  $\beta$ , on prend  $r_3 = 0.05$ . La fonction  $\psi_1$  est choisie sous forme radiale

$$(2.8.227) \quad \psi_1(\mathbf{x}) = \zeta(\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{F})) \nu_{F,1}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

avec

$$(2.8.228) \quad \zeta(r) = \begin{cases} 1 & r \leq r_1 \\ \frac{(r - r_2)^2 (3r_1 - r_2 - 2r)}{(r_1 - r_2)^3} & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & r \geq r_2 \end{cases}$$

avec  $r_1 = 0.015$  et  $r_2 = 0.045 < r_3$ . Cela nécessite un raffinement local afin d'avoir suffisamment d'éléments dans la couronne  $\text{disc}(\mathbf{F}, r_2) \cap \text{disc}(\mathbf{F}, r_1)$ , support du gradient de  $\psi_1$ , à partir duquel est évalué  $g_\psi$ .

Les résultats qui suivent sont obtenus avec un maillage  $82 \times 82$  éléments sur  $\Omega = (0, 1)$  dont  $20 \times 20$  éléments dans la zone  $[1/2 - r_3, 1/2 + r_3] \times [1/2 - r_3, 1/2 + r_3]$  entourant la pointe de fissure  $\mathbf{F}$ . La figure 2.30 représente les iso-valeurs de la densité limite, pour  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ ,  $L = 2/5$ . La distribution obtenue permet une réduction du taux dans un rapport 3 : on a  $I(s^{opt}, t^{opt}) \approx 2.7 \times 10^{-2} N/m$  : l'évolution de ce taux est donnée par la figure 2.31-gauche. A chaque itération, environ 5 itérations de la méthode de Newton sont nécessaires afin d'atteindre un résidu de l'ordre de  $10^{-10}$ . La solution  $u$  correspondante est donnée sur la figure 2.31-droite. Il apparaît que le matériau de faible conduction  $\alpha$  est situé près de  $\Gamma_{0,2}$ , permettant d'absorber partiellement le chargement (i.e. le déplacement imposé) et ainsi réduire son influence sur la zone fissurée. De plus, nous vérifions *a posteriori* la relation (2.8.211) :

$$(2.8.229) \quad \|(\rho - \lambda^-(s^{opt})\lambda) \cdot (\rho - \lambda^+(s^{opt})\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \approx 1.32 \times 10^{-6}.$$

Par ailleurs,

$$(2.8.230) \quad \|\rho - \lambda^+(s^{opt})\lambda\|_{L^2(\Omega)} \approx 3.13 \times 10^{-4}, \quad \|\rho - \lambda^-(s^{opt})\lambda\|_{L^2(\Omega)} \approx 4.21 \times 10^{-3}.$$

$\lambda^-$  est proche de  $\lambda^+$  et la densité est *quasiment* (à l'approximation numérique près) une fonction caractéristique.

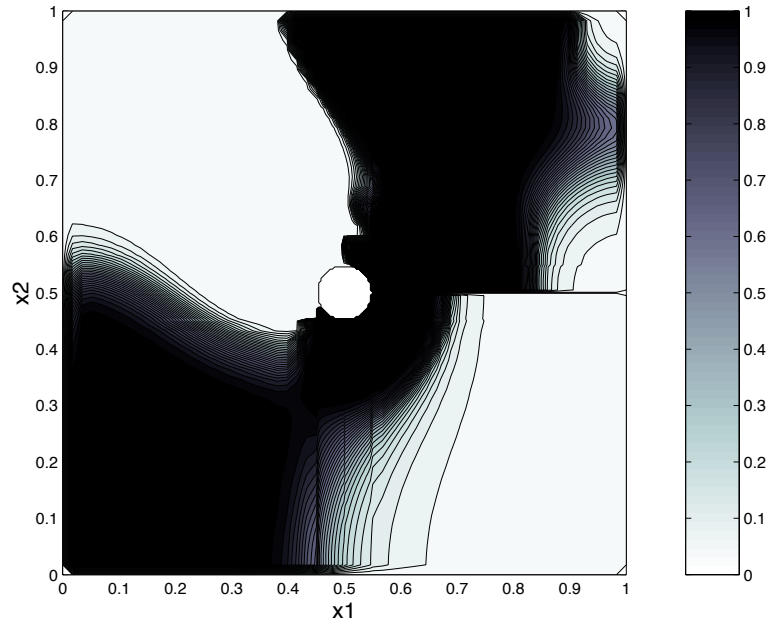


FIG. 2.30:  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ -  $L = 2/5$  ;  $\mathbf{F} = (1/2, 1/2)$  - Iso-valeurs de la densité optimale sur le domaine fissuré  $\Omega$  avec  $s^{opt} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

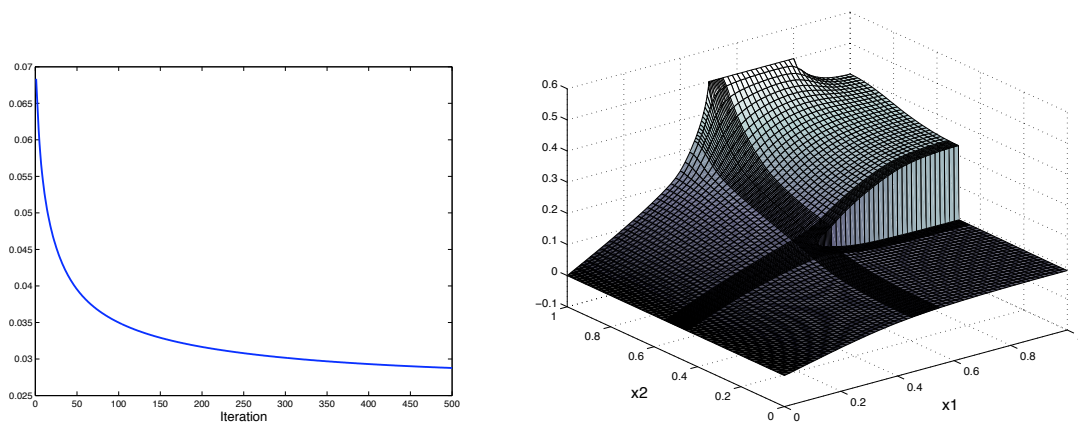


FIG. 2.31:  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ -  $L = 2/5$  ;  $\mathbf{F} = (1/2, 1/2)$  - Evolution du cout relaxé  $I(s^{(k)}, t^{(k)})$  vs.  $k$  (gauche) et solution  $u$  correspondante sur  $\Omega$  (droite).

**Remarque 2.8.8.** – A nouveau, lorsque le rapport des conductivités est suffisamment petit, la densité optimale prend toute ses valeurs proches de 0 et 1. Par ailleurs, de façon un peu surprenante la figure 2.30 suggère que la distribution optimale n'est pas homogène autour de la pointe de la fissure : la partie supérieure gauche, jusqu'à  $\mathbf{F}$  étant composé du matériau  $\beta$ . La partie inférieure gauche est au contraire composé du matériau  $\alpha$ .

- Le taux de restitution est réduit significativement mais n'est pas ramené à zéro : la singularité en  $\mathbf{F}$  n'est pas éliminée. Nous suspectons que cela est dû à la contrainte sur la conductivité dans le voisinage  $\mathcal{D}$ , nécessaire pour assurer l'invariance de  $g_\psi$  par rapport à  $\psi$ .

■

La figure 2.32 représente les iso-valeurs de  $s$  dans le cas  $(\alpha, \beta) = (1, 10)$ .  $s$  n'est plus une fonction caractéristique sur  $\Omega$ . Par ailleurs, l'égalité (2.8.211) demeure

$$(2.8.231) \quad \|(\rho - \lambda^-(s^{opt})\lambda) \cdot (\rho - \lambda^+(s^{opt})\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \approx 1.32 \times 10^{-5}$$

mais cette fois ne correspond *a priori* ni à la moyenne harmonique ni à la moyenne arithmétique :

$$(2.8.232) \quad \|\rho - \lambda^+(s^{opt})\lambda\|_{L^2(\Omega)} \approx 8.21 \times 10^{-1}, \quad \|\rho - \lambda^-(s^{opt})\lambda\|_{L^2(\Omega)} \approx 4.09 \times 10^{-1}.$$

On obtient le coût  $I(s^{opt}, t^{opt}) \approx 1.15 \times 10^{-2} N/m$ . Le matériau de plus faible conductivité reste cependant principalement concentré autour de la pointe de fissure et autour de  $\Gamma_{0,2}$ . Signalons que pour  $(\alpha, \beta) = (1, 10)$ , le nombre d'itération de la méthode de Newton augmente à environ 15 par itération du gradient (la partie non linéaire dans (2.8.219) devenant significative).

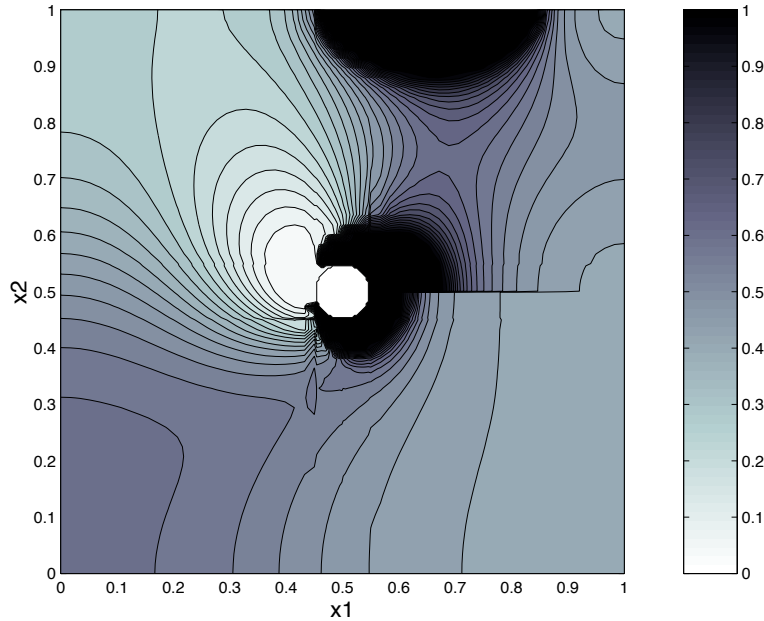


FIG. 2.32:  $(\alpha, \beta) = (1, 10)$ -  $L = 2/5$ ;  $\mathbf{F} = (1/2, 1/2)$  - Iso-valeurs de la densité  $s^{lim}$  sur  $\Omega$ .

Dans le cas où la densité n'est pas une fonction caractéristique, il convient d'associer une fonction pénalisée : selon l'analyse théorique la normale aux laminés en chaque point est parallèle au vecteur  $\lambda_\beta - \lambda_\alpha$ , dont on représente les composantes sur la figure 2.33 (on renvoie à [PT08], dans le cadre de l'homogénéisation, pour la construction d'une forme pénalisée).

**Remarque 2.8.9.** – L'analyse de la relaxation dans le cadre de l'opérateur d'élasticité restant un problème ouvert, il serait intéressant d'utiliser la méthode des lignes de niveaux dans ce cas. Pour un problème similaire dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, je mentionne la référence [AJG07].

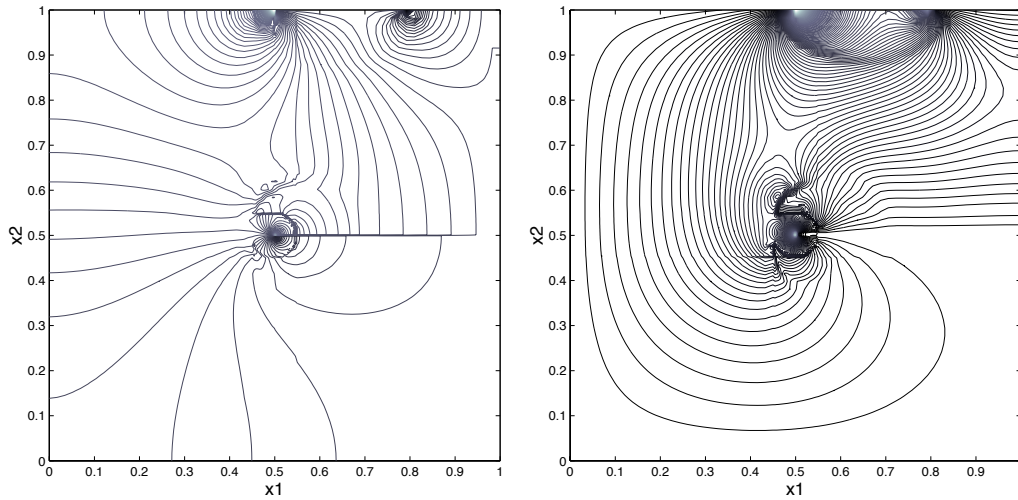


FIG. 2.33:  $(\alpha, \beta) = (1, 10)$ -  $L = 2/5$ ;  $\mathbf{F} = (1/2, 1/2)$  - Iso-valeurs des composantes du vecteur  $\lambda_\beta - \lambda_\alpha$ .

- Dans les références [6, 7] un problème similaire est considéré dans le cadre de l'opérateur d'élasticité bi-dimensionnel et prenant en compte **la condition de contact unilatéral** sur les lèvres de la fissure  $\gamma$  : la conductivité étant supposée homogène dans  $\Omega$ , le problème consiste à minimiser le taux de restitution par rapport à l'amplitude et au support d'un chargement frontière normal sur  $\partial\Omega/(\Gamma_0 \cup \Gamma_g \cup \gamma)$ . L'étude <sup>7</sup> en collaboration avec PATRICK HILD<sup>8</sup> et YVES OUSSET<sup>9</sup>, met en évidence la compétition entre le mode I d'ouverture et le mode II de cisaillement.

■

<sup>7</sup>s'inscrivant dans le cadre de l'ANR-05-JC-0182-01 intitulée *Inéquation variationnelle et Application à la mécanique du contact* et commune au laboratoire de Mathématique de Besançon et de l'Insa-Lyon.

<sup>8</sup>Laboratoire de Mathématiques - Université de Franche-Comté, Besançon.

<sup>9</sup>Département Mécanique du solide et de l'endommagement, ONERA, Chatillon.





## Quelques perspectives

- Le premier chapitre indique qu’une technique permettant de recouvrer l’observabilité uniforme pour l’équation des ondes est de rajouter un terme du type  $(h^2 - \Delta t^2)\Delta_{\Delta t}\Delta_h y_h$ , négligeable pour les composantes faible fréquence de la solution (discrète). Dans le cas *simple* de l’équation des ondes, ce type de terme, qui dépend explicitement de la solution, est identifié à la main, soit par une analyse spectrale, soit pour absorber dans une énergie (et donc un schéma) modifiée les termes de mauvais signe de l’inégalité d’observabilité (voir par exemple l’équation (1.5.179)). De façon plus systématique, comme souligné dans la remarque 1.4.38, il est peut-être intéressant de considérer une équation du type

$$(2.8.1) \quad y''(t, x) - \Delta y(t, x) + \varepsilon V(t, x) = v(t, x)\mathcal{X}_\omega(x), \quad (0, T) \times \Omega$$

avec  $\varepsilon$  de l’ordre  $h^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ),  $V$  une fonction régulière telle que  $\|V\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq 1$ , d’en déterminer le contrôle exact  $v$  (dépendant de la fonction  $V$ ) puis d’optimiser la constante d’observabilité associée par rapport à  $V$  :

$$(2.8.2) \quad \inf_{V, \|V\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq 1} C_{obs}(\phi_V, V).$$

- L’approximation numérique de la contrôlabilité exacte pour l’équation de la chaleur n’est pas abordée ici. Des travaux récents (voir [Zua06]) ont montré, au moins dans le cas semi-discret unidimensionnel, que le schéma aux différences finies usuel conduit à une séquence de contrôles uniformément convergente. En d’autres termes, la pathologie numérique observée pour l’équation de ondes n’a pas lieu pour l’équation de la chaleur. Cependant, dans la pratique, l’implémentation numérique de la contrôlabilité exacte (où l’état final est une trajectoire de l’équation de la chaleur) exhibe un mauvais comportement de la méthode du gradient conjugué : le nombre d’itérations est notamment très important <sup>10</sup>. Si pour tout  $h$ , on introduit les deux constantes  $C_1(h)$  et  $C_2(h)$  telles que

$$(2.8.3) \quad C_1(h)\|\phi_h(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\omega \int_0^T \phi_h^2(x, t) dx dt \leq C_2(h)\|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \phi_h(T, \cdot) \in L^2(\Omega)$$

où  $\phi_h$  est la solution de

$$(2.8.4) \quad \begin{cases} \phi_h' + c\phi_{h,xx} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ \phi_h = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ \phi_h(T, \cdot) = \phi_T, & \Omega, \end{cases}$$

le conditionnement numérique de l’opérateur HUM est encadré de la façon suivante :

$$(2.8.5) \quad C_1(h)C_2^{-1}(h)h^{-2} \leq \text{cond}(\Lambda_h) \leq C_2(h)C_1^{-1}(h)h^{-2}.$$

La constante d’observabilité  $C_1(h)$  est uniformément minorée en  $h$ . En revanche, la constante  $C_2(h) \rightarrow \infty$  quand  $h$  tend vers zéro. Des expériences numériques indiquent que le conditionnement se comporte en  $e^{c/h}$ ,  $c > 0$  : le problème est exponentiellement mal posé (voir [Kin99]). La régularisation de Tychonoff

<sup>10</sup>exception faite du cas où le contrôle interne est distribué sur le domaine tout entier !

permet d'améliorer la robustesse de l'approximation, au prix cependant d'une convergence très lente du contrôle. Par ailleurs, l'ajout du terme singulier  $-h^\alpha \phi'_{h,xx}$ ,  $\alpha \in (1, 2]$  permet de réduire la valeur du conditionnement numérique (qui reste toutefois exponentiel) et d'améliorer sensiblement le comportement du gradient conjugué. La détermination d'une méthode ou d'un préconditionnement robuste et efficace demeure un challenge. Plusieurs travaux sont en cours, notamment dans le cadre de l'ANR CONUM<sup>11</sup> (voir [31]).

- Je suis également intéressé par traiter quelques problèmes en contrôlabilité non linéaire. Il semble par exemple intéressant d'étendre au cas interne (contrôle ou obstacle) l'étude récente [32] mentionnée en fin de première partie et concernant la contrôlabilité frontière d'une corde soumise à un obstacle unilatéral. Dans ce cas, la méthode des caractéristiques est plus lourde à mettre en œuvre. Par ailleurs, dans la thématique de l'ANR citée ci-dessus, une thèse co-encadrée avec F. AMMAR-KHODJA va débiter en octobre 2008 sur la contrôlabilité de systèmes non linéaires de réaction-diffusion.
- Beaucoup reste à faire sur la contrôlabilité des coques membranaires. L'intérêt théorique - au delà des applications évidentes - et la difficulté, provient de la présence du spectre essentiel de l'opérateur membranaire  $A_M$ , réduit à un point dans le cas d'une surface elliptique, et à un intervalle dans le cas d'une surface parabolique (je renvoie à [30]). Le cas de la flexion pure est également intéressant : le système est alors

$$(2.8.6) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'' + \mathbf{A}_F \mathbf{y} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{A}_M \mathbf{y} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ + \text{Conditions aux limites} \end{cases}$$

$A_F$  désigne l'opérateur de flexion.

- La contrôlabilité des ondes locales qui apparaissent à l'interface de deux matériaux de caractéristiques différentes me semble à examiner (je renvoie à [Des07]). Il s'agit par exemple d'étendre l'étude des joints collés de [8, 9, 10] au cas dynamique et prévenir la rupture du joint, lieu de concentration d'énergie, par une action de contrôle. De même, l'étude de l'approximation du contrôle HUM de l'équation des ondes posée sur un domaine fissuré semble également un challenge.
- Dans la seconde partie concernant l'optimisation de forme, nous avons travaillé à donnée initiale  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$  fixée. Il serait intéressant d'étudier systématiquement l'optimisation de domaine  $\omega$  uniformément par rapport aux données initiales, et considérer les problèmes du type :

$$(2.8.7) \quad \inf_{\omega} \sup_{(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)} J(\omega, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$$

*a priori* pas plus difficiles au niveau de l'analyse de la relaxation. Par exemple dans [31], nous résolvons pour  $L \in (0, 1)$ , le problème suivant

$$(2.8.8) \quad \inf_{\omega \subset \Omega, |\omega|=L|\Omega|} C(\omega) = \sup_{\phi_T \in L^2(\omega)} \frac{\|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\int_{\omega} \int_0^T \phi^2(x, t) dx dt},$$

avec  $\Omega = (0, 1)$  et  $\phi$  solution de (2.8.4). A  $\omega$  fixé dans  $\Omega$ , le supremum se ramène à un calcul spectral, résolu par l'algorithme de la puissance<sup>12</sup>. L'infimum utilise les techniques de la seconde partie : on obtient que la densité optimale  $s$  varie peu sur  $\Omega$  de sorte que la distribution optimale de  $\omega$  est - aux effets du bord près - uniforme sur le domaine  $\Omega$ . Pour  $L = 1/5$ ,  $T = 1$  et  $c = 1/10$ , la densité optimale est représentée sur la figure 2.34 ainsi qu'une fonction pénalisée caractéristique associée pour laquelle  $C(\omega) \approx 1.179$ , soit une réduction importante par rapport par exemple à la position centrée  $\omega = ]1/2 - L/2, 1/2 + L/2[$  pour laquelle  $C(\omega) \approx 2.301$ . Le caractère uniforme de la distribution est naturellement dû au fait que l'on minimise uniformément en les données initiales. Il est probable qu'une telle propriété demeure pour l'équation des ondes, ainsi que pour les autres problèmes considérés dans la seconde partie. Cela reste à vérifier.

<sup>11</sup>Contrôle, Problème inverse, Application à la biologie, ANR-07-JC-1832-84, commune au laboratoire de Mathématiques de Besançon et au laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilité d'Aix-Marseille I.

<sup>12</sup>chaque itération est un problème de contrôlabilité.

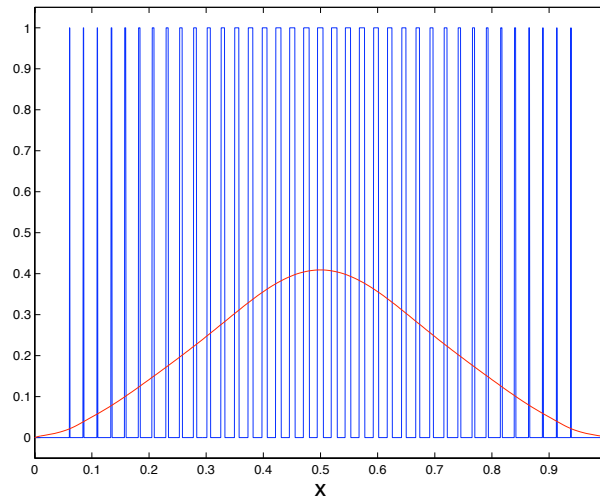


FIG. 2.34:  $|\omega| = 1/5 - h = 1/200 - T = 1 - c = 0.1$  - Densité optimale et une fonction caractéristique pénalisée associée - LA DISTRIBUTION DE  $\omega$  EST UNIFORME SUR  $\Omega$ .

- Je mentionne également le cas des problèmes inverses (dans des situations dynamiques), lorsqu’il s’agit de localiser une inhomogénéité à partir de mesures frontières. Ces problèmes ne sont rien d’autres que des problèmes d’optimisation de forme, l’intégrande de la fonctionnelle à minimiser étant défini sur le bord de mesure. Il serait intéressant d’utiliser les techniques de la seconde partie dans ces cas.
- Enfin, je souhaite aborder plus systématiquement les problèmes d’optimisation de forme pour des domaines dépendants du temps ; dans le cadre de la contrôlabilité exacte pour l’équation des ondes 1-D, des calculs préliminaires suggèrent que le support du contrôle HUM *suit* les composantes et les rebonds de la solution contrôlée (voir la figure 2.35).

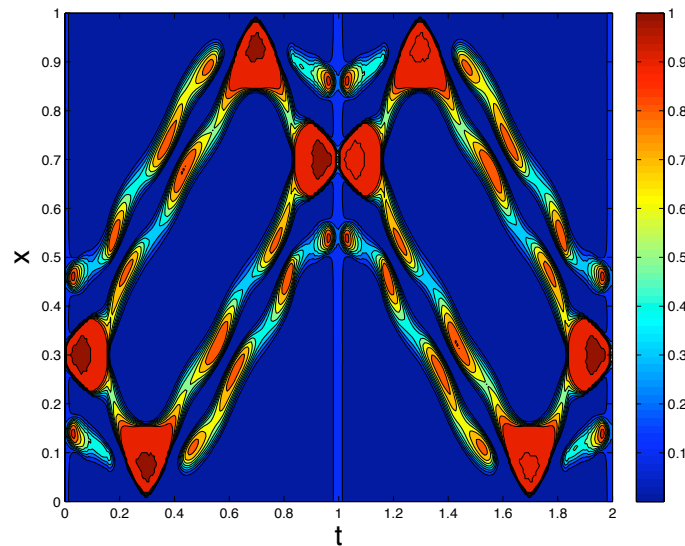


FIG. 2.35: Iso-valeurs de la densité optimale  $s(t, x)$  correspondante à la donnée  $(y^0, y^1) = (e^{-100(x-0.3)^2}, 0)$  concentrée en  $x = 0.3 - x \in (0, 1), t \in (0, 2)$ .



# Publications de l'auteur

## Thèse de Doctorat

- [1] A. Münch. Three dimensional crack growth in layered composites media : curved interfaces and bonded joints. *Thèse de l'université Paris VI*, 1-237, 2002.

## Articles parus ou à paraître

- [2] F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et A. Münch. On the exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum. *C.R. Acad. Sci., Paris Série Mathématique.*, **346(11-12)**, 629-634, 2008.
- [3] M. Asch et A. Münch. Uniformly controllable schemes for the wave equation on the unit square. A paraître dans *Journal of Optimization. Theory and Applications*.
- [4] C. Castro, S. Micu et A. Münch. Boundary controllability of a semi-discrete wave equation on the unit square with mixed finite elements. *IMA J. Numerical Analysis.*, **28**, 186-214, 2008.
- [5] D. Chapelle, C. Mardare et A. Münch. Asymptotic consideration shedding light on the incompressible shell models. *J. of Elasticity.*, **76**, 199-246, 2004.
- [6] P. Hild, A. Münch et Y. Ousset. On the control of crack growth in elastic media. *C.R. Acad. Sci., Paris Série Mécanique.*, **336**, 422-427, 2008.
- [7] P. Hild, A. Münch et Y. Ousset. On the active control of crack growth in elastic media. A paraître dans *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (doi 10.1016/j.cma.2008.08.010), 2008.
- [8] F. Krasucki, A. Münch et Y. Ousset. Asymptotic analysis of a bonded joint in nonlinear elasticity. *C.R. Acad. Sci., Paris Série IIb.*, **329**, 429-434, 2001.
- [9] F. Krasucki, A. Münch et Y. Ousset. Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joints. *Int. J. of Solids and Structures*, **39**, 6355-6383, 2002.
- [10] F. Krasucki, A. Münch et Y. Ousset. Mathematical analysis of nonlinear joints models. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **14**, 535-556, 2004.
- [11] F. Maestre, A. Münch et P. Pedregal. A spatio-temporal design problem for a damped wave equation. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **68**, 109-132, 2007.
- [12] F. Maestre, A. Münch et P. Pedregal. Optimal design under the one-dimensional wave equation. *Interface and Free Boundaries Journal*, **10(1)**, 87-117, 2008.
- [13] B. Miara et A. Münch. Controllability of a piezoelectric body. Theory and numerical simulation. *To appear in Applied Mathematics and Optimization*.
- [14] A. Münch. Family of implicit and controllable schemes for the 1-D wave equation. *C.R. Acad. Sci., Paris Série I.*, **339**, 733-738, 2004.
- [15] A. Münch. A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-D wave equation. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis.*, **39**, 377-418, 2005.
- [16] A. Münch. Un problème d'optimisation de forme pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes 2-D. *C.R. Acad. Sci., Paris Série I.*, **343**, 213-218, 2006.
- [17] A. Münch. Optimal design of the support of the control for the 2-D wave equation : numerical investigations. *Int. J. Numerical Analysis and Modeling*, **5**, 331-351, 2008.

- [18] A. Münch. Optimal location of the support of the control for the 1-D wave equation : numerical investigations. *Computational Optimization and Applications* , (doi 10.1007/s10589-007-9133-x) 2008.
- [19] A. Münch. Optimal internal stabilization of a damped wave equation by a level set approach. *International Journal of applied Mathematics and Computer Science*, **19(1)**, 1-25, 2009.
- [20] A. Münch et Y. Ousset. Energy release rate for a thin curvilinear beam. *C.R. Acad. Sci., Paris Série IIb.*, **328**, 471-476, 2000.
- [21] A. Münch et Y. Ousset. Numerical simulation of delamination growth in curved interfaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrng.*, **191**, 2073-2095, 2002.
- [22] A. Münch et A.F. Pazoto. Uniform stabilization of a viscous numerical approximation scheme for a locally damped wave equation. *Control, Optimization and Calculus of Variation.*, **13**, 265-293, 2007.
- [23] A. Münch et A.F. Pazoto. Boundary stabilization on a nonlinear arch : Theoretical vs. Numerical Analysis. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Serie B*, **10(1)**, 197-219, 2008.
- [24] A. Münch, P. Pedregal et F. Periago. A variational approach to a shape design problem for the wave equation. *C.R. Acad. Sci., Paris Série I.*, **343**, 371-376, 2006.
- [25] A. Münch, P. Pedregal et F. Periago. Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation. *J. of Differential Equations.*, **231**, 330-353, 2006.
- [26] A. Münch, P. Pedregal et F. Periago. An optimal design problem for the stabilization of the linear system of elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, A paraître 2008 (doi :10.1007/s00205-008-0187-4) .
- [27] A. Münch, P. Pedregal et F. Periago. Relaxation of an optimal design problem for the Heat equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **89(3)**, 225-247, 2008.

#### Article soumis

- [28] A. Münch et P. Pedregal. Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanic. En révision à Esaim : COCV, Février 2008.
- [29] A. Münch. Exact boundary controllability of a circular arch. Soumis à JMAA, Mars 2008.

#### Article en preparation

- [30] F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et A. Münch. On the exact controllability of a membrane dominated shell.
- [31] F. Boyer, F. Hubert et A. Münch. Numerical approximation of the observability constant for the heat equation.
- [32] F. Ammar-Khodja, S. Micu et A. Münch. Exact controllability of a string submitted to a unilateral constraint.

# Bibliographie

- [AJG07] G. Allaire, F. Jouve et N. Van Goethem. A level set method for the numerical simulation of damage evolution. *Preprint CMAP, Ecole Polytechnique*, 2007.
- [AJT04] G. Allaire, F. Jouve et A.M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and level-set methods. *J. Comp. Phys.*, 194, 363–393, 2004.
- [AL98] M. Asch et G. Lebeau. Geometrical aspects of exact controllability for the wave equation - a numerical study. *ESAIM COCV*, 3, 163–212, 1998.
- [AL03] M. Asch et G. Lebeau. The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in  $\mathbb{R}^2$ . *Experiment. Math.*, 12, 227–241, 2003.
- [All02] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*. Springer Verlag New-York, 2002.
- [AP03] E. Aranda et P. Pedregal. Constrained envelope for a general class of design problems. *Disc. Cont. Dyn. Syst.*, pages 30–41, 2003.
- [AZ08] F.D. Araruna et E. Zuazua. Controllability of the kirchhoff system for beams as limit of the mindlin-timoshenko one. *SIAM Control and Optimization*, 47, 1909–1938, 2008.
- [BB87] H. Buefler et K. Baitinger. Non-linear shell dynamics based on a mixed variational formulation. *Computational Mechanics*, 2, 197–213, 1987.
- [BCM94] M. Bernadou, P.G. Ciarlet et B. Miara. Existence theorems for two-dimensional linear shell theory. *J. Elasticity*, 34, 111–138, 1994.
- [Ben90] A. Bensoussan. On the general theory of exact controllability for skew symmetric operators. *Acta Appl. Math.*, 20(3), 197–229, 1990.
- [Ber55] H.M. Berger. A new approach to the analysis of large deflections of plates. *J. Appl. Mech.*, 22, 465–472, 1955.
- [BIW91] H.T. Banks, K. Ito et C. Wang. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. *Internat. Ser. Numer. Math.*, 100, 1–33, 1991.
- [BO05] M. Burger et S.J. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *European Journal of Applied Mathematics*, 16, 263–301, 2005.
- [Bou93] F. Bourquin. Approximation theory for the problem of exact controllability of the wave equation with boundary control. *Second international Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE)*, pages 103–112, 1993.
- [Bui83] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson Paris, 1983.
- [Bur03] M. Burger. A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. *Interface and free boundaries*, 5, 301–329, 2003.
- [CB03] D. Chapelle et K.J. Bathe. *The finite element analysis of shells - Fundamentals*. Computational Fluid and Solids Mechanics, Springer Verlag Berlin, 2003.
- [CC01] C. Castro et S.J. Cox. Achieving arbitrarily large decay in the damped wave equation. *Siam J. Control Optim.*, 6, 1748–1755, 2001.



- [CGY03] S. Chai, Y. Guo et P.F. Yao. Boundary feedback stabilization of shallow shells. *SIAM J. Control and Opt.*, 42, 239–259, 2003.
- [Cia00] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity, Volume III : Theory of Shell*. Studies in Mathematics and its applications, 29, North Holland, 2000.
- [Cor07] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity*. Mathematical surveys and monographs, 136, Providence, RI, 2007.
- [CZ99] J. Cagnol et J.P. Zolesio. Shape derivative in the wave equation with dirichlet boundary condition. *J. Diff. Eq.*, 158, 175–210, 1999.
- [Dac89] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [DDL83] P. Destuynder, M. Djaoua et S. Lescure. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. Meca. Theor. Appli*, 2, 113–135, 1983.
- [Des88] P. Destuynder. An approach to crack propagation control in structural dynamics. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série II*, 306, 953–956, 1988.
- [Des89] P. Destuynder. Remarks on a crack propagation control for stationary loaded structures. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série Iib*, 308, 697–701, 1989.
- [Des90a] P. Destuynder. Computation of an active control in fracture mechanics using finite elements. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9, 133–141, 1990.
- [Des90b] P. Destuynder. *Modélisation des coques élastiques minces*. Masson, Paris, 1990.
- [Des05] P. Destuynder. Stationnary hum method in control theory and approximation. *Preprint*, pages 1–14, 2005.
- [Des07] P. Destuynder. *Vibrations des structures et des systèmes couplés*. Hermes, Paris, 2007.
- [DP05] A. Donoso et P. Pedregal. Optimal design of 2-D conducting graded materials by minimizing quadratic functionals in the field. *Struc. Multidisc Optim.*, pages 360–367, 2005.
- [DZ01] M.C. Delfour et J.P. Zolesio. *Shapes and Geometries - Analysis, Differential Calculus and Optimization*. SIAM, 2001.
- [EZZ08] S. Ervedoza, C. Zheng et E. Zuazua. On the observability of time-discrete conservative linear systems. *J. Functional Analysis*, 254, 3037–3078, 2008.
- [FCZ04] E. Fernández-Cara et E. Zuazua. On the history and perspectives of control theory. *Matapli.*, 74, 47–73, 2004.
- [FL07] I. Fonseca et G. Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations :  $L^p$  spaces*. Springer Monographs in Mathematics, 2007.
- [FM98] G.A. Francfort et J.J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46, 1319–1342, 1998.
- [Fre98] P. Freitas. Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using genetic algorithms : a counterexample to the constant damping conjecture. *Siam J. Control. Optim.*, 37, 376–387, 1998.
- [GG77] G. Grubb et G. Geymonat. The essential spectrum of elliptic systems of mixed order. *Math. Ann.*, 227, 247–276, 1977.
- [GGM01] S. Garreau, P. Guillaume et M. Masmoudi. The topological asymptotic for pde systems : the elasticity case. *SIAM J. Control Optim.*, 39, 1756–1778, 2001.
- [GKW89] R. Glowinski, W. Kinton et M.F. Wheeler. A mixed finite element formulation for the boundary controllability of the wave equation. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 27, 623–636, 1989.
- [GL96] R. Glowinski et J.L. Lions. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, pages 159–333, 1996.
- [GLL90] R. Glowinski, C.H. Li et J.L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (i). dirichlet controls : Description of the numerical methods. *Jap. J. Appl. Math.*, 7, 1–76, 1990.

- [Glo91] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy ; stokes problem and boundary control for the wave equation. *J. Comput. Phys.*, 103, 189–221, 1991.
- [GLV91] G. Geymonat, P. Loreti et V. Valente. Contrôlabilité exacte d'un modèle de coque mince. *C.R. Acad. Sci Série I*, 313, 81–86, 1991.
- [GLV92] G. Geymonat, P. Loreti et V. Valente. Exact controllability of a shallow shell model. *International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel*, 107, 85–97, 1992.
- [GLV93] G. Geymonat, P. Loreti et V. Valente. *Exact controllability of thin elastic hemispherical shell via harmonic analysis*. Boundary value problems for partial differential equations and applications, Masson, 1993.
- [GLV95] G. Geymonat, P. Loreti et V. Valente. *Spectral problems for thin shells and exact controllability*, volume 49. Spectral Analysis of Complex structures, Travaux en cours, Hermann, 1995.
- [Gra01] Y. Grabovsky. Optimal design problems for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals. *Advan. Appl. Math.*, pages 683–704, 2001.
- [Gri20] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 46, 163–198, 1920.
- [Gri92] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Research in Applied Mathematics Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [GV00] G. Geymonat et V. Valente. A noncontrollability result for systems of mixed order. *SIAM J. Control Optim*, 39, 661–672, 2000.
- [GV01] G. Geymonat et V. Valente. Relaxed exact controllability and asymptotic limit for thin shells. *Differential and Integral Equations*, 14, 1267–1280, 2001.
- [Har89] A. Haraux. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Portug. Math.*, 46, 245–258, 1989.
- [Har90] A. Haraux. A generalized internal control for the wave equation in a rectangle. *J. Math. Anal. Appl.*, 153, 190–216, 1990.
- [HH03] P. Hebrard et A. Henrot. Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string. *Systems and control letters*, 48, 199–209, 2003.
- [HH05] P. Hebrard et A. Henrot. A spillover phenomenon in the optimal location of actuators. *Siam J. Control and Optimization*, 44, 349–366, 2005.
- [HM01] A. Henrot et H. Mailllot. Optimization of the shape and the location of the actuators in an internal control problem. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.*, 3, 737–757, 2001.
- [HP05] A. Henrot et M. Pierre. *Variation et Optimisation de formes - Une analyse géométrique*. Mathématiques et Applications, 48, 2005.
- [Ing36] A.E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Math. Z.*, 41, 367–369, 1936.
- [IZ08] L. Ignat et E. Zuazua. Convergence of a two-grid algorithm for the control of wave equation. *To appear in Journal of the European Mathematical Society*, 2008.
- [KI98] K. Kappel et K. Ito. The trotter-kato theorem and approximations of pde's. *Math. of Comput.*, 67, 21–44, 1998.
- [Kin99] S. Kindermann. Convergence rates of the hilbert uniqueness method via tikhonov regularization. *J. Optimization. Theory and Applications.*, 103, 657–673, 1999.
- [KL04] V. Komornik et P. Loreti. *Fourier series in control theory*. Springer Monographs in Mathematics, 2004.
- [Kom94] V. Komornik. *Exact controllability and Stabilization - The multiplier method*. J. Wiley and Masson, 1994.
- [KP92] D. Kinderlehrer et P. Pedregal. Weak convergence of integrands and the young measure representation. *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 1–19, 1992.

- [Kre01] S. Krenk. Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 191, 975–987, 2001.
- [KS97] A.M. Khludnev et J. Sokolowski. *Modelling and Control in Solids Mechanics*. Studies in Mathematics and its applications, 122, Birkhauser, 1997.
- [Lag89] J.E. Lagnese. *Boundary stabilization of thin plates*. SIAM Stud. Appl. Math, Philadelphia, 1989.
- [Leb03] J.B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès Science, 2003.
- [Leb07] C. Lebedzik. Exact boundary controllability of a shallow intrinsic shell model. *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 584–614, 2007.
- [LG97] J. Lopez-Gomez. On the linear damped wave equation. *J. Differential Equations*, 134, 26–45, 1997.
- [Lio88] J.-L. Lions. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, volume 1. Masson, Paris, 1988.
- [LL88] J.E. Lagnese et J.L. Lions. *Modelling analysis and control of thin plates*. Masson, Recherche en Mathématiques Appliquées 6, Paris, 1988.
- [LM68] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, volume 1. Dunod, 1968.
- [LM08] P. Loreti et M. Mehrenberger. An ingham type proof for a two-grid observability theorem. *To appear in Esaim : COCV*, 2008.
- [LT00] I. Lasiecka et R. Triggiani. *Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. II. Abstract hyperbolic-like systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 75, Cambridge University Press, 2000.
- [LT06] S. Labbé et E. Trélat. Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems. *Systems Control Lett.*, 55, 597–609, 2006.
- [LTV96] I. Lasiecka, R. Triggiani et V. Valente. Uniform stabilization of spherical shells by boundary dissipation. *Advances in differential equations*, 4, 635–674, 1996.
- [Lur98] K.A. Lurie. The problem of the effective parameters of a mixture of two isotropic dielectrics distributed in space-time and the conservation law of wave impedance in one-dimensional wave propagation. *Proc. R. Soc. London A*, 454, 1767–1779, 1998.
- [Lur99] K.A. Lurie. Control of the coefficients of linear hyperbolic equations via spatio-temporal composites. in *Homogenization, World Scientific, Singapore (V. Berdichevsky, V. Jikov and G. Papanicolau eds.)*, pages 285–315, 1999.
- [Lur04] K.A. Lurie. A stable spatio-temporal  $g$ -closure and  $g_m$ -closure of a set of isotropic dielectrics with respect to one-dimensional wave propagation. *Wave Motion*, 40, 95–110, 2004.
- [LV97] P. Loreti et V. Valente. Partial exact controllability for spherical membranes. *SIAM J. Control Optim.*, 35, 641–653, 1997.
- [LV02] R. Lipton et A.P. Velo. Optimal design of gradient field with applications to electrostatics. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, College de France Seminar Volume XIV (D. Cioranescu and J.L. Lions eds.)*, 2002.
- [Meh08] M. Mehrenberger. An ingham type proof for the boundary observability of a n-d wave equation. *Preprint*, 2008.
- [MPZ02] G.P. Menzala, A.F. Pazoto et E. Zuazua. Stabilization of berger-timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the von karman system of beams and plates. *Mathematical modelling and Numerical Analysis*, 36, 657–691, 2002.
- [Mul99] S. Muller. *Variational models for microstructure and phase transitions*, volume 1713. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1999.
- [Mur77] F. Murat. Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients. *Ann. Mat. Pura ed Appl. Serie*, 4, 49–68, 1977.

- [MV99] B. Miara et V. Valente. Exact controllability of a koiter shell by a boundary action. *J. Elasticity*, 52, 267–287, 1999.
- [MZ01] G.P. Menzala et E. Zuazua. On a one-dimensional version of the dynamical marguerre-vlasov system. *Bol. Soc. Bra. Mat.*, 32, 303–319, 2001.
- [MZ04] S. Micu et E. Zuazua. *Controllability of Partial Differential Equations*, volume 64. in *Contrôle non linéaire et applications*, Ed. Tewfik Sari, Hermann, Paris, 2004.
- [NBSS06] M.T. Niane, G. Bayili, A. Sène et M. Sy. Is it possible to cancel singularities in a domain with corners and cracks? *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 343, 115–118, 2006.
- [NUS80] S.D. Nigam, R. Usha et K. Swaminathan. Divergence-free vector fields. *J. Math. Phy. Sci.*, 14, 523–527, 1980.
- [NZ04a] M. Negreanu et E. Zuazua. Convergence of a multi-grid method for the controllability of a 1-d wave equation. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 338, 413–418, 2004.
- [NZ04b] M. Negreanu et E. Zuazua. Discrete ingham inequalities and applications. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 338, 281–286, 2004.
- [OS88] S.J. Osher et J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79, 12–49, 1988.
- [Ped97] P. Pedregal. *Parametrized Measures and Variational Principles*. Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, 1997.
- [Ped00] P. Pedregal. *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [Ped04] P. Pedregal. Constrained quasiconvexification of the square of the gradient of the state in optimal design. *Quart. Appl. Math.*, 62, 459–470, 2004.
- [Ped05] P. Pedregal. Vector variational problems and applications to optimal design. *ESAIM :COCV*, 11, 357–381, 2005.
- [Ped07] P. Pedregal. Div-curl young measures and optimal design in any dimension. *Rev. Univ. Complutense*, 20, 239–255, 2007.
- [Per09] F. Periago. Optimal shape and position of the support for the internal exact control of a string. *Systems and control letters*, 2009.
- [PSP95] A.L. Pellerin et E. Sanchez-Palencia. *Local and global vibrations of shells in membrane approximation*, volume 49. Spectral analysis of complex structures Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1995.
- [PT08] O. Pantz et K. Trabelsi. A post-treatment of the homogenization for shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 47, 1380–1398, 2008.
- [Ras04] J.M. Rasmussen. Boundary control of linear evolution pdes : Continuous and discrete. *PhD Thesis, Kongens Lyngby, Denmark*, pages 1–179, 2004.
- [RT83] P.A. Raviart et J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [RT89] J.E Robert et J.-M. Thomas. Mixed and hybrid methods. *Handbook of Numerical Analysis.*, 2, 1989.
- [RTT06] K. Ramdani, T. Takahashi et M. Tucsnak. Internal stabilization of a plate in a square : the continuous and the semi-discretized problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 85, 17–37, 2006.
- [RTT07] K. Ramdani, T. Takahashi et M. Tucsnak. Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations – application to lqr problems. *Esaim : Cocv*, 13, 503–527, 2007.
- [Rus78] D. L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *SIAM Review.*, 20, 639–739, 1978.

- [Sed99] V.I. Sedenko. On the uniqueness theorem for generalized solutions of initial-boundary problems for the marguerre-vlasov vibrations of shallows shells with clamped boundary conditions. *Appl. Math. Optim.*, 39, 309–326, 1999.
- [Set96] J.A. Sethian. *Level set methods : Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge University Press, 1996.
- [Shi98] B.K. Shivamoggi. *Theoretical Fluid Dynamics*. John Wiley and Sons, 1998.
- [SHSP93] J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia. *Coques élastiques minces : propriétés asymptotiques*. Masson, Paris, 1993.
- [SZ92] J. Sokolowski et J.P. Zolésio. *Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis.*, volume 16. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [SZ99] J. Sokolowski et A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37, 1251–1272, 1999.
- [Tar94] L. Tartar. Remarks on optimal design problems, in calculus of variations, homogenization and continuum mechanics. (*G. Buttazzo, G. Bouchitte and P. Suquet, eds.*), *World Scientific, Singapore*, pages 279–296, 1994.
- [Tar00] L. Tartar. An introduction to the homogenization method in optimal design. *Lecture notes in Mathematics, Eds. A. Cellina, A. Ornelas*, 1740, 47–156, 2000.
- [Tre82] L. N. Trefethen. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Rev.*, 24, 113–136, 1982.
- [Tri96] R. Triggiani. Regularity theory, exact controllability, and optimal quadratic cost problem for spherical shells with physical boundary controls. *Control Cybernet.*, 25, 553–568, 1996.
- [TTZ03] L.R. Tcheugoué-Tébou et E. Zuazua. Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity. *Numer. Math.*, 95, 563–598, 2003.
- [WWG03] M.Y. Wang, X. Wang et D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computat. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 192, 227–246, 2003.
- [Zua90] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping. *Communication in PDE*, 15(2), 205–235, 1990.
- [Zua99] E. Zuazua. Boundary observability for the finite difference space semi-discretizations of the 2-d wave equation in the square. *J. Math. Pures Appl.*, 78, 523–563, 1999.
- [Zua05] E. Zuazua. Propagation, observation, control and numerical approximations of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 47, 197–243, 2005.
- [Zua06] E. Zuazua. Control and numerical approximation of the wave and heat equations. *International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, III*, 1389–1417, 2006.