



HAL
open science

Comment le professeur oriente-t-il les élèves vers des éléments du contrat ou vers des éléments du milieu au cours de la résolution d'un problème de mathématiques ?

Manon Bouilly

► To cite this version:

Manon Bouilly. Comment le professeur oriente-t-il les élèves vers des éléments du contrat ou vers des éléments du milieu au cours de la résolution d'un problème de mathématiques ?. Education. 2020. hal-02972485

HAL Id: hal-02972485

<https://univ-fcomte.hal.science/hal-02972485v1>

Submitted on 20 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire

Présenté pour l'obtention du Grade de

MASTER

« Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation »

Mention 2nd degré, Professeur des Lycées et Collèges,

Comment le professeur oriente-t-il les élèves vers des éléments du contrat ou vers des éléments du milieu au cours de la résolution d'un problème de mathématiques ?

Présenté par

BOULLY Manon

Sous la direction de :

ATHIAS Francine

Grade : Maître de conférences en sciences de l'éducation.

Remerciements

Je souhaite remercier ici les personnes ayant contribué à la réalisation de ce mémoire professionnel.

Je remercie en premier lieu Mme Athias, maitre de conférences en sciences de l'éducation pour le temps qu'elle m'a consacrée et l'aide qu'elle m'a apportée dans le choix du sujet et dans la sélection de ressources appropriées.

Je remercie également Mr Le Borgne, maitre de conférences et enseignant-chercheur à l'université et à l'ESPE de Besançon pour les conseils et échanges lors des cours dédiés à la préparation du mémoire.

Table des matières

I.	Introduction	1
II.	Outils théoriques.....	3
1.	Les problèmes en mathématiques.....	3
2.	Notions de contrat et milieu didactique	6
III.	Synthèse et questions de recherches	14
IV.	Séance de classe : la résolution d'un problème de rallye mathématique transalpin (RMT) en classe de 6 ^{ème}	15
1.	Présentation du rallye mathématique transalpin (RMT)	15
2.	Présentation du problème	17
3.	Description de la situation didactique en langage commun.....	21
4.	Re description à l'aide de notions modèles	27
V.	Conclusion	34
VI.	Bibliographie	36
VII.	Annexes	38
	Annexe 1 : Enoncés des trois problèmes mettant en avant la rupture du contrat didactique	38
	Annexe 2 : Enoncé du problème présenté en classe de 6 ^{ème} pour mon expérimentation	39
	Annexe 3 : Transcription de la séance filmée	39
	Annexe 4 : Production du groupe 1	52
	Annexe 5 : Production du groupe 2	53

I. Introduction

Enseignante stagiaire en mathématiques au collège Albert Mathiez à Marnay et en formation à l'INSPE de Besançon dans le cadre d'un master MEEF, j'ai en charge une classe de 6^{ème} et une classe de 5^{ème}.

Un premier travail de lecture d'articles scientifiques a été réalisé au cours de ma première année de formation (M1), ces premières lectures ont porté sur des méthodes de résolution d'exercices en mathématiques. Ce choix de thématique m'intéresse car la majorité des questions venant des élèves ou des parents ont la même idée : comment travailler son cours de mathématique ? Y-a-t-il des méthodes ?

Rogalski (1989) se questionne sur la notion des méthodes mathématiques, sur ses bénéfices, ses inconvénients et sur sa mise en place dans une classe. Castella et Mercier (1996) s'interrogent sur les méthodes à enseigner. Dans les deux articles, le constat est le même : les méthodes n'existent pas en soi. Elles se construisent.

Ce constat m'a interpellé. Comment, jeune enseignante, je peux organiser des situations de résolutions de problèmes à mes élèves, alors qu'il n'y aurait pas de méthode. En discussion avec ma directrice de mémoire au cours de ma deuxième année de formation, nous avons décidé de mettre à l'épreuve un travail de recherche au sein de mes classes afin de voir ce qu'il se passe lors de la résolution d'un problème mathématique. En amont, j'ai lu des articles scientifiques qui traitent de la didactique.

La didactique étudie chacune des étapes de l'acte de l'apprentissage et met en avant l'importance du rôle de l'enseignant comme médiateur entre l'élève et le savoir. Voici une définition proposée par Sensevy (2011) : « La didactique est la science dont les pratiques d'éducation font l'objet. Une pratique d'éducation est fondée sur la transmission d'un savoir. On saisit donc que dans l'acceptation que j'en donne, l'éducation englobe l'enseignement, l'apprentissage, et l'instruction, au sens courant de ces termes. Éduquer, c'est instruire d'un savoir ». De l'épistémologie des disciplines aux avancées de la psychologie cognitive, c'est l'ensemble du processus construisant le rapport au savoir qui est analysé.

Je suis donc curieuse d'approfondir ce sujet en me renseignant, dans un premier temps, sur plusieurs recherches et publications puis, en décrivant ma propre pratique. A travers ce mémoire, je cherche à décrire et à comprendre ce qui se passe dans ma classe.

Il s'agira, à travers une première partie de guider ma réflexion sur les problèmes mathématiques et de classer les différents problèmes mathématiques puis de présenter des éléments théoriques qui me permettront de décrire l'action en classe. Une seconde partie, qui sera portée sur la pratique, nous conduira à décrire et à comprendre une séance en classe de 6^{ème} lors de la résolution d'un problème tiré du rallye mathématique transalpin au cours de l'année scolaire 2019-2020.

II. Outils théoriques

Avant de définir les contours exacts de mon sujet et de ma question de recherche, le premier travail a été d'alimenter ma réflexion sur les éléments de didactique. Cela m'a permis d'obtenir une vision plus précise de cette thématique et d'en dégager les points qui me paraissent essentiels en parallèle avec mon expérience au collège de Marnay.

Deux temps vont guider ces recherches, premièrement, je m'intéresserai aux différents problèmes que l'on peut rencontrer en mathématiques puis je m'attarderai sur deux notions phares : celles de contrat didactique et de milieu didactique afin de cadrer le mieux possible mon thème.

1. Les problèmes en mathématiques

D'après le bulletin officiel (n°3 du 26 avril 2018), les situations-problèmes sont de plus en plus présentes dans les programmes du secondaire, ce sont des situations créant un problème et dont la solution fera intervenir des outils, des techniques ou des notions déjà acquises afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Un des objectifs du programme étant de mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Les problèmes mathématiques sont donnés avec une intention didactique qui est celle d'activer certaines notions ou de préparer la construction de nouvelles notions.

Un problème confronte l'élève à une difficulté, l'élève ne sait pas faire immédiatement, il est donc mis en situation de « résolution de problème ». L'élève ne comprend pas ou ne réussit pas une « chose » instantanément. Une « chose » restant un terme très large et pouvant désigner un savoir-faire tel que la cuisine, l'art...

Les élèves doivent être capable de s'adapter à tous types de problèmes, à tous types de questions et de reconnaître les connaissances à utiliser pour répondre afin de ne pas s'habituer aux mêmes types d'exercices. Pour cela il faut pouvoir classifier les problèmes en fonction des types de problèmes, des objectifs, des outils..., cette classification des problèmes permet de posséder « une boîte à outils » dans laquelle on

viendrait se servir en fonction du problème. Il faut donc accorder de l'importance aux problèmes ne possédant pas de « schémas de résolution ».

Houdement (2017) explique que les problèmes doivent avoir plusieurs fonctions (motiver, introduire, entraîner, réinvestir, évaluer, chercher...) et plusieurs formes (texte minimal, texte alourdi d'informations, texte avec ou sans questions, texte avec ou sans schémas, texte reprenant une situation vécue...). Le plus souvent, le mode de communication des problèmes est un énoncé écrit mais d'autres modes existent. Un problème peut être présenté avec le mime, cela peut minimiser la difficulté de la compréhension de la consigne, cela peut également aider à « entrer » plus facilement dans le problème. Une présentation orale ou à l'aide d'un support numérique comme une vidéo peut aussi permettre la présentation du problème. L'enseignant doit susciter la curiosité et encourager la persévérance dans la recherche.

Deux types de problèmes se distinguent dans un premier temps (Houdement, 1999), les problèmes dits « basiques » (en relation avec le niveau scolaire donné) et les problèmes dits « non basiques » où la situation est simple mais la réponse est moins rapidement trouvée que les problèmes « basiques ». Pour les élèves, c'est cette représentation qui se rapproche le plus de leur propre approche des problèmes. En effet, il y a les problèmes qu'ils reconnaissent et savent traiter et ceux où ils « bloquent », où il faut prendre des risques.

Les problèmes dits « basiques » sont destinés à permettre l'utilisation d'un savoir, d'un concept mathématique antérieurs. Ce sont des résolutions « automatisées ». On peut retrouver ce type d'enjeu dans des situations d'application et de réinvestissement. L'enjeu des élèves est de les mémoriser.

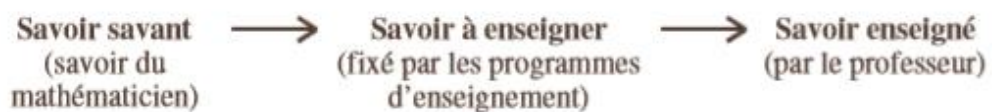
Dans les problèmes « non basiques », nous pouvons distinguer deux « sous-problèmes » que l'on nommerait « problèmes complexes » et « problèmes pour chercher ». Les problèmes dits « complexes » sont des problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations complexes. L'élève doit alors décomposer le problème en sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et en qualifiant ses résultats, c'est-à-dire, à réussir à les

remettre dans le contexte de l'énoncé. Les élèves doivent constituer leurs propres questions. Les problèmes à « tâches complexes » pourraient se ranger dans cette catégorie. Les problèmes « pour chercher » / « atypiques » sont les problèmes où l'élève ne dispose pas de démarches préalablement explorées. Les apprenants doivent faire preuve d'inventivité stratégique, de flexibilité de raisonnement, de persévérance et de confiance en soi. Les problèmes dits « ouverts » pourraient illustrer cette catégorie de problèmes.

La représentation des problèmes se construit en trois processus simultanés, qui interagissent : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration, le processus d'opérationnalisation. Ces trois processus sont issus des travaux de Julo (1995). Le premier processus cité met en jeu l'interprétation des données de l'énoncé en sélectionnant des informations. Le second processus permet de rendre compte que la représentation forme un tout cohérent qui s'organise, se structure. Des liens entre les données, les savoirs et les savoirs-faires sont à réaliser pour réussir. Le dernier processus cité est le côté visible de la résolution. Il permet le passage à l'action (calculs, tracés...) et/ou le passage mental (déductions...).

Les problèmes enrichissent la mémoire des problèmes de chaque élève. Ce type de tâche est à réaliser le plus tôt possible en variant les supports et thèmes. Ainsi, l'élève disposerait de plus de schémas et face à un nouveau problème, il serait plus habile à faire des parallèles avec des choses déjà rencontrées. En effet, la résolution d'un problème serait facilitée dès lors que l'élève pourrait activer en mémoire à long terme la représentation pertinente et les connaissances associées. Cette représentation mentale guiderait la restitution des données de l'énoncé et activerait les procédures de résolution du problème. Ce cas se présente si le sujet a déjà rencontré cette catégorie de problème, c'est la théorie du schéma qui a été développée par Kintsch et Greeno (1985). Toutes les situations de résolution de problèmes ne comportent pas de schémas de traitement « prêt à l'emploi », dans ce cas l'élève doit engager une procédure « pas à pas » et construire une représentation de la situation. C'est la théorie des modèles mentaux qui a été développée par Johnson-Laird (1993).

La chaîne suivante peut résumer le passage entre le savoir savant et le savoir enseigné. Les programmes d'enseignement fixent le savoir à enseigner qui deviendra ensuite le savoir enseigné par le professeur. Le passage du contenu de savoir mentionné dans les programmes à une version didactique de cet objet de savoir est nommée transposition didactique.



Transposition du savoir savant au savoir enseigné (Chevallard, 1985)

Mes connaissances théoriques sur les problèmes vont me permettre de faire le lien avec ce qu'il se passe en classe lors de la résolution de problèmes. C'est ce qu'on appellera la modélisation en termes de contrat et milieu didactique.

2. Notions de contrat et milieu didactique

Pour analyser les séances de classe, je vais principalement m'appuyer sur un travail réalisé par un collectif de recherche s'intitulant « Didactique pour enseigner », Collectif Didactique pour Enseigner (CDpE, 2019) puisque ce travail répond à mes préoccupations en analysant des séances en classe. Ce travail a cherché à concrétiser des notions théoriques élaborées en didactique, et en particulier au sein de la théorie de l'action conjointe en didactique pour les pratiques d'enseignement et d'apprentissage. Quelques autres articles viendront compléter ma réflexion sur ces notions.

Une notion-modèle va venir enrichir et alimenter notre réflexion, celle de la dialectique contrat-milieu. Nous verrons que les notions de *contrat* et de *milieu* sont opposées et complémentaires à la fois d'où la dialectique contrat-milieu.

Intéressons-nous dans un premier temps à la notion de contrat. Partant d'un problème donné, le contrat est l'ensemble des capacités, des savoirs déjà acquis avant de faire le problème. C'est le *déjà-là, le connu* (CDpE, p.16) et c'est ce que l'on appelle le « contrat didactique ». Le contrat didactique se réfère donc à l'ensemble des connaissances avec lesquelles l'élève aborde un problème. Les éléments du contrat didactique peuvent être vus comme une capacité, une attente, une norme, une habitude, une règle d'usage, qui sont souvent implicites. Le contrat didactique peut se modéliser par la question suivante : « qu'est-ce que les élèves connaissent pour résoudre le problème ? ».

Une partie très importante de ces connaissances est issue de l'action conjointe antérieure avec le professeur, nous nous intéresserons d'ailleurs uniquement à celle-ci puisque c'est la seule dont nous disposons. C'est-à-dire la façon dont les savoirs ont été inculqués à l'élève par le professeur. Ce contrat didactique s'enracine implicitement dans la relation professeur/élève qui est construite. En effet, ces règles sont nées par la répétition dans les comportements du professeur, cela est vu comme un arrière-plan implicite. Cela me fait penser au modèle de rédaction souvent appliqué par les professeurs de mathématiques. Une démonstration mathématique doit respecter des règles syntaxiques qui n'est pas naturelle pour les élèves. Des exigences d'un modèle de rédaction peuvent induire de leur part des comportements relevant de l'imitation plus que de la compréhension. En accordant une trop grande importance aux activités formelles (« Je sais que » ... « Or » ... « Donc » ...) on risque d'éloigner les élèves du raisonnement lui-même et du plaisir de chercher alors que « Chercher » et « Raisonner » font partie du nouveau système d'évaluation par compétences. Certains élèves ont des difficultés à rentrer dans les « codes » de rédaction d'une démonstration, peut-être faudrait-il essayer de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales. Souvent imparfaites, elles constituent de véritables objets d'étude pour la classe au cours d'un débat et permettent de faire émerger les critères d'une rédaction performante, sans pour

autant modéliser le travail. Certains élèves préféreront placer la conclusion à la fin (démonstration sous forme déductive), alors que d'autres préféreront la placer au début, suivie de « car ».

D'après ces premiers éléments, nous pouvons donc nous demander : quelles sont les limites de cette relation professeur/élèves ? Par exemple, la simple présence du professeur dans la classe influe-t-elle sur le mode de résolution d'un problème ?

Se pose également le problème des habitudes enracinées qui vont devoir être modifiées. Par exemple la vision des nombres entiers, vue depuis les premières années d'école, est différente de la vision des nombres décimaux. La comparaison de nombres décimaux va donc être un changement pour les élèves de 6^{ème}. Ils ne devront plus comparer le nombre de chiffres qui compose chaque nombre mais raisonner sur la valeur des chiffres et le système de numération. Par exemple, pour comparer 3,45 et 3,5, les élèves diront que 3,45 est plus grand que 3,5 car 3,45 a plus de chiffres que 3,5. Le contrat didactique peut provoquer des difficultés chez certains élèves.

Un exemple illustrant cette observation peut être approfondi. Une expérimentation (Castella et Mercier, 1996) a été effectuée auprès de cinq élèves de BEP Agricoles qui ont été entraînés à une automatisation procédurale systématique sur l'étude des fonctions affines. Trois problèmes assez proches du problème standard leur ont été proposés. *Voir énoncés des problèmes en Annexe 1.*

Le premier problème reprenait donc les questions habituelles de l'enseignement suivi par ces élèves, aux coefficients près des fonctions. Les cinq élèves traitent le problème selon la procédure normalisée, il met en échec les deux élèves les plus faibles. Aucun élève n'a commis une erreur, dans le doute les élèves s'arrêtent.

Le deuxième problème reprenait une situation familière, la forme de l'énoncé, c'est-à-dire, le type de l'énoncé, les indications, les difficultés éventuelles relevaient d'une situation « type » posée à l'examen. Deux élèves dits « moyens » traitent le problème en ne suivant pas la procédure « normale », ils réussissent à traiter le problème en commettant quelques erreurs de calcul. Les autres qui suivent la procédure standard se trouvent rapidement bloqués. Les élèves dits « moyens » arrivent à développer des

procédures personnelles. On appelle ici élève moyen un élève qui ne se distingue ni par ses réussites, ni par ses échecs.

Le troisième proposait une modélisation des lois d'un marché. Ici, aucun élève ne réussit le problème et quatre signalent une rupture de contrat. En particulier, les élèves qui ne savent pas ce qu'est une fonction croissante, considèrent qu'on ne peut pas interpréter des coefficients négatifs pour une fonction d'offre car l'ordonnée à l'origine est négative, ce qui ne gênait pas dans le premier problème. On note cependant, qu'un seul élève « moyen » commence à s'engager dans une démarche.

Nous retiendrons de cet exemple l'importance du contrat didactique installé entre l'enseignant et les élèves. Le contrat est rompu lorsque l'élève ne reconnaît plus ce qu'il devrait savoir-faire. On peut donc définir la plasticité du contrat qui est « la possibilité que le contrat a de supporter une variation, et ce qui garantit la faisabilité du problème par l'élève ». En reprenant l'exemple, une variable comme la taille des coefficients numériques dans les équations conserve sa capacité à assurer une compréhension et une faisabilité du problème. En revanche, le signe des coefficients numériques contribue fortement à la rupture du contrat du troisième problème. Ces constatations sont vues comme du contrat et c'est une des raisons pouvant inciter à enseigner des méthodes.

Nous pouvons illustrer et comprendre ce qu'est le contrat didactique par un autre exemple que nous verrons dans la seconde partie (transcription n°19) où l'élève lie les nombres et les opérations mais les calculs n'ont pas de sens. Cet exemple peut être rapproché avec un exemple connu : *l'âge du capitaine* par Stella Baruk. On demande aux élèves de résoudre un problème absurde qui est le suivant : « Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres, quel est l'âge du capitaine ? » (Ce problème est posé à des classes allant du CE2 à la 5^{ème}). Une étude montre qu'une très grande partie des élèves fournit des réponses « plausibles » ou non. Par exemple 36 ans (addition des nombres) ou bien 260 ans (multiplication des nombres). Les élèves ont à résoudre en permanence des problèmes de ce type au cours de leur scolarité, cela est donc naturel pour les élèves de répondre à tous les problèmes donnés par le professeur. Nous voyons que pour résoudre un problème, les élèves ont des habitudes, des règles bien définies : ils ont à donner une

réponse, pour cela, ils s'appuient sur les données de l'énoncé (en l'occurrence les 2 nombres) et ces nombres sont associés à la dernière opération étudiée en classe. Cet exemple nous fait prendre conscience des limites du contrat didactique. Nous pouvons également nous interroger sur les personnes qui osent poser de tels problèmes : quels sont les objectifs pédagogiques ? Les élèves peuvent se sentir piégés par le professeur, le contrat entre le professeur et l'élève peut ensuite se rompre.

L'élève cherche à comprendre le plus possible le contrat implicite qu'il y a entre le professeur, l'activité et lui-même. Ceci favorise l'enseignement mais ne garantit pas et met même en péril la réelle activité mathématique de l'élève. L'élève se demande ce que veut le professeur et ne cherche pas à comprendre le problème et l'enseignant a envie que ses élèves réussissent.

Un court échange tiré de la transcription du film réalisé pour la partie expérimentale entre la professeure et les élèves peut servir d'illustration à cette notion :

- P. : « 13, inférieur... ? »
- Un élève répond instantanément : « C'est plus petit ! »

Ici, sans rien préciser, uniquement avec un nombre, un mot et l'intonation donnée, les élèves comprennent très rapidement la réponse attendue. Ce type de question peut être perçu comme du contrat implicite entre le professeur et l'élève. C'est du vocabulaire qui fait parti des connaissances à posséder pour un élève de 6^{ème}, ils savent ce que le professeur attend d'eux et ce qu'ils doivent être capable de connaître ou de restituer.

D'autres effets constituent le contrat didactique. L'effet Topaze, qui peut être illustré par un professeur suggérant aux élèves de regarder la production d'un élève en particulier. Les élèves vont penser que le raisonnement de l'élève désigné par le professeur est correct, que c'est l'exemple à suivre. Un autre exemple peut illustrer cet effet : le professeur résume un début de raisonnement, puis le continue, et laisse aux élèves compléter sa phrase. Le professeur entend la réponse voulue et les élèves pensent avoir rempli leur rôle. Nous reverrons ces exemples dans la partie expérimentale.

Lorsqu'un élève rencontre une difficulté, l'effet topaze consiste d'une manière ou d'une autre à la surmonter à sa place. Le professeur « suggère » la bonne réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents. Ici, il ne s'agit plus de mener un raisonnement seul mais de comprendre un raisonnement d'un élève désigné par le professeur ou encore de finir la phrase du professeur.

L'effet Jourdain consiste à éviter le constat d'échec chez l'élève en reconnaissant l'indice d'une connaissance savante de la part du professeur dans les réponses des élèves. L'élève obtient la bonne réponse par une banale reconnaissance et le professeur atteste par un discours mathématique savant. L'élève traite un exemple et l'enseignant met la structure.

Nous pouvons également illustrer cet effet par un dialogue entre l'élève et la professeure (tiré d'un passage de la transcription pour la partie expérimentale) :

- « Aller, vas-y ! », dit le professeur à Jean
- « 15 ... 15 c'est 3 dinosaures et 5 dinosaures, il manquera 11€ », dit Jean, hésitant.
- « Oui », le professeur confirme les propos de Jean.
- « Donc si tu fais $15 + 11$, ça fait 26, ça fera 2 dinosaures. De 3 à 5, ça fait 2 », continue Jean.
- « De 3 à 5, ça fait 2, d'accord et donc du coup 2 dinosaures, ça fera 26€ », répète le professeur.
- « Oui », réplique Jean.
- « C'est ça ! », dit le professeur.
- « Et $26 \div 2 = 13$ », finit Jean.

On remarque que le professeur encourage beaucoup l'élève et confirme, reformule tous ces propos. L'élève donne toutes les étapes pour arriver à la réponse correcte mais seul, Jean n'y arrive pas.

Lors de l'introduction d'un nouveau savoir, les habitudes vont donc être remises en question dans un nouveau milieu-problème. Le milieu est « tout ce qui agit sur l'élève

ou / et ce sur quoi l'élève agit » (Joffredo-Le Brun, 2016. p.4). Le but étant d'acquérir de nouvelles capacités lorsque l'élève est confronté à un certain milieu porteur de nouvelles connaissances à se procurer. Nous résolvons un problème pour apprendre de nouvelles choses. Le milieu c'est le problème, la situation avec la mise en avant de désaccords, de discussions au sein d'un groupe, de productions. Le milieu est alors constitué de plusieurs signes dont il faut réussir à mettre en lien, à organiser en un système cohérent qui constitue le nouveau savoir. Le nouveau savoir étant présenté comme un outil efficace pour franchir l'obstacle rencontré.

Le milieu peut être plus ou moins complexe, c'est la résistance du problème. Les variables didactiques sont des moyens pour varier la complexité du problème, les situations d'enseignement et d'apprentissage. Ces variables didactiques peuvent être modifiées par l'enseignant, ces modifications ont pour but d'infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. Par exemple, cela peut être les données de l'énoncé qui peuvent être changés ou bien l'organisation du travail (seul, en groupes), support numérique... « C'est en jouant sur des choix adéquats de ces variables que l'on peut provoquer de nouveaux apprentissages, en visant à faire émerger chez les élèves de nouvelles connaissances comme des outils nécessaires pour résoudre un problème. Les variables didactiques affectent la hiérarchie des stratégies de solutions par le coût, la validité la complexité. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, classer et modéliser des situations dans une perspective didactique » (Brousseau, 2003).

Le rôle du professeur joue alors un rôle primordial et indispensable au sein de la classe, en posant les bonnes questions, le professeur va apporter des aides permettant d'identifier plus facilement le but à atteindre. Il va devoir mettre en place des stratégies pour engager l'action des élèves. Il peut par exemple taire des choses (la réticence) ou produire des signes pour indiquer la direction à prendre à l'élève (l'expression). C'est la dialectique réticence/expression, une deuxième notions-modèle en didactique. Deux stratégies se distinguent : la stratégie-technique qui prend appui sur certaines connaissances, certains supports déjà là (un lien émerge alors entre les stratégies et le contrat) ou bien la stratégie-heuristique qui est une manière d'avancer vers la solution

mais qui est souvent incertaine. Un milieu est décrit par les signes qu'il va manifester et les stratégies que ces signes permettent d'activer.

D'après CDpE (2019), nous voyons donc que « pour travailler le problème (le milieu), les élèves vont chercher dans leurs connaissances ce qui pourraient les aider. Le contrat didactique prend donc son sens que par rapport au problème que l'élève doit travailler. Les capacités sont nécessaires mais non suffisantes pour effectuer ce travail, sinon l'élève n'apprendrait rien de nouveau par rapport à ce qu'il sait déjà. Il y a donc une forme de déséquilibre initial entre le contrat (le déjà-là, qui résulte en grande partie de l'action conjointe antérieure) et le milieu (ce qui est à connaître, présent dans une structure symbolique spécifique). »

Décrire le contrat c'est prendre en compte le milieu, « l'inconnu d'un problème n'a de sens que dans le connu auquel il fait référence » (CDpE). Le contrat didactique n'est donc à envisager qu'en relation avec un milieu didactique d'où la dialectique contrat-milieu.

III. Synthèse et questions de recherches

Un constat sur les élèves et les enseignants relève des singularités lors de la résolution de problèmes, le démarrage d'un problème est difficile, l'attitude devant les exercices est en relation avec une certaine activité mathématiques. Il y a donc une grande difficulté dans les problèmes de réinvestissement, de prise d'initiative ou dans les problèmes ouverts qui ne révèlent pas de « recettes ». Ce type de problème est souvent court, l'objectif est clair, mais il n'y a aucune indication. Le but de ces exercices est d'apprendre à chercher plutôt que de trouver rapidement la solution, il faut être capable de s'engager dans une démarche, prendre des initiatives. Devant de tels problèmes, on remarque une certaine passivité chez les élèves. Les enseignants se sentent donc obligés de donner des problèmes remplis de « montrer que » et d'indications. Nous avons donc à faire à un cercle vicieux.

Ce constat m'incite à faire travailler mes élèves sur ces types de problèmes. Je pense que les élèves peuvent « rencontrer » les mathématiques s'ils ont l'opportunité de se faire leur propre expérience et ce, le plus tôt possible. Il faut les laisser se constituer « un réservoir d'outils potentiels » en vue d'enquêtes à venir. On obtient une meilleure imprégnation du savoir par l'expérience. Il faudrait leur laisser l'occasion de résoudre des problèmes. L'institutionnalisation vient par la suite, où les élèves pourront s'y référer si besoin.

Toute cette réflexion m'amène à faire des premières précisions sur les questions que je souhaiterais approfondir dans la suite de mon mémoire à travers ma pratique d'enseignante.

Notre question de recherche peut maintenant être formulée : comment le professeur oriente-t-il les élèves vers des éléments du contrat ou vers des éléments du milieu au cours de la résolution d'un problème de mathématiques ?

IV. Séance de classe : la résolution d'un problème de rallye mathématique transalpin (RMT) en classe de 6^{ème}.

Pour cette recherche, je vais choisir ma classe de 6^{ème} puisque mon souhait serait de les initier le plus tôt possible à ce type de tâche. De plus, j'espère qu'ils feront preuve de spontanéité.

Afin de pouvoir amener des éléments de réponses à ma question de recherche, j'opterai pour le choix d'une séance de classe filmée que je décrirai puis analyserai. A travers celle-ci, je pourrai analyser les comportements, avoir un regard global mais aussi centré sur ce qu'il se passe dans la classe quand les élèves sont en situation de recherche.

1. Présentation du rallye mathématique transalpin (RMT)



Le Rallye mathématique transalpin est une confrontation entre classes, des niveaux 3 (CE2) à 10 (seconde) dans le domaine de la résolution de problèmes de mathématiques. Il est organisé au niveau international par « l'Association Rallye Mathématique Transalpin » (ARMT).

Chaque épreuve du rallye est composée de 6 à 7 problèmes, à résoudre en 50 minutes. Les élèves doivent donc composer des groupes en fonction du nombre de problèmes, une seule solution par problème doit être proposée pour la classe. Les 2 épreuves officielles qui suivent l'entraînement se font hors la présence du professeur

titulaire, cela pourrait être intéressant d'y revenir. En effet, dans la première partie, une question s'est posée sur les limites du contrat didactique et notamment l'influence de la simple présence du professeur quand les élèves sont en activité mathématique.

Ce concours offre diverses opportunités pour les élèves et les enseignants. Les élèves font des mathématiques en résolvant des problèmes reprenant des situations de la vie quotidienne. Ils vont pouvoir discuter et défendre leurs idées, la compétence « *Raisonner* » prend alors toute sa place. Le travail de groupe est également un atout de ce concours, celui-ci permet de développer d'autres compétences telles que la solidarité, l'entraide et la responsabilité.

Pour les professeurs, le rallye permet d'observer les élèves en activité de résolution de problème, celui-ci offre une source très riche de résultats, d'observations et d'analyses. Les problèmes du Rallye mathématique transalpin pourraient se classer dans les « *problèmes pour chercher* », ils prennent souvent la forme d'un problème à prise d'initiative, type d'énoncé de plus en plus présent dans les programmes d'enseignements. Ceux-ci sollicitent l'autonomie et l'imagination, ils ont pour but de susciter un comportement de recherche, en effet, les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, ils doivent en inventer de toutes pièces en s'appuyant sur leurs connaissances passées et leur mémoire des problèmes. Les problèmes à prise d'initiative font acquérir des compétences : procéder à des essais, émettre des hypothèses, les valider ou les rejeter. L'objectif est d'apprendre à chercher plutôt que de trouver rapidement. La responsabilité de la démarche appartient entièrement à l'élève, et les tentatives, même non abouties, sont aussi importantes que la production du résultat, et peuvent parfois faire des objets d'études importants pour la classe au cours d'un débat.

La synthèse de tels problèmes consistera souvent à une comparaison de procédures, pour apprécier les avancées dans la résolution du problème d'une démarche non aboutie, pour répertorier les différentes démarches qui atteignent l'objectif fixé, parfois pour distinguer par ses performances l'une des démarches.

Ces différents points motivent le choix de travailler sur un problème tiré du Rallye mathématique transalpin en plus du fait de participer à ce concours. De plus, la classe de 6^{ème} participe cette année au 28^{ème} rallye mathématique transalpin.

2. Présentation du problème

L'énoncé est le suivant (Annexe 2) :

TROIS, QUATRE OU CINQ DINOSAURES ?

Avec son argent, Tom veut s'acheter des modèles de dinosaures. Dans le magasin de jouets, ces modèles sont tous au même prix.

Tom constate que :

- s'il achète trois dinosaures, il lui restera 15€
- mais pour acheter cinq dinosaures, il lui manque 11€.

Tom a-t-il assez d'argent pour acheter quatre dinosaures ?

Si oui, combien d'argent lui restera-t-il ?

Si non, combien d'argent lui manquera-t-il ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

Nous pouvons résumer l'énoncé de cette façon : trouver le prix de 4 objets identiques sachant que le prix de 3 objets augmenté de 15€ est égal au prix de 5 objets diminué de 11€.

Ce problème fut proposé aux catégories 5, 6, 7 c'est-à-dire aux classes de CM2, 6^{ème} et 5^{ème}.

Il se classe dans le domaine suivant : Opérations arithmétiques avec des nombres naturels. La tâche des élèves est de choisir les bonnes opérations à utiliser pour la résolution, c'est une tâche qui est souvent proposée dans divers contextes de la vie courante. Dans le domaine de l'arithmétique, les élèves sont décevants car ils n'utilisent

pas les bonnes opérations, le sens des opérations n'est pas acquis chez de nombreux élèves. La résolution réussie des problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique. Cela a donc motivé mon choix d'énoncé, les problèmes arithmétiques permettent de renforcer la maîtrise des relations et opérations sur des nombres naturels.

Les élèves vont devoir passer du contexte décrit par l'énoncé aux relations numériques entre les valeurs données. Il s'agira d'identifier les grandeurs en présence, de reconnaître les liens entre elles, de voir les contraintes imposées par l'énoncé puis de traduire les relations en opérations arithmétiques, en comparaisons, en égalités... Une fois ce premier travail effectué, les élèves devront donc répondre au problème posé en utilisant une procédure : procédure par essais-erreurs et vérifications, procédure par essais organisés, par simplifications progressives des relations... Ce sont les savoir-faire de l'élève.

La forme de l'énoncé est un paramètre important qui va déterminer la part d'initiative laissée à l'élève. Ici, l'énoncé est plutôt court et structuré avec des « tirets » afin de mettre en évidence les informations. Trois questions sont proposées, les deux dernières questions font peut-être office « d'obligation » à justifier la réponse à la première question, là où un élève se contenterait de répondre : oui ou non. Aucun schéma accompagne le texte. L'objectif de l'énoncé est clair mais les concepts mathématiques pour le résoudre sont absents ou implicites. Il n'y a aucune indication, plusieurs pistes sont à priori envisageables.

Les six compétences mathématiques peuvent être travaillées à travers ce problème, les connaissances portent sur les nombres naturels, la multiplication, l'addition, la différence, le reste.

Concernant le scénario pédagogique, la séance se déroulera sur une durée de 50 minutes. Le premier travail consistera à donner les consignes et expliquer mes attentes (\approx 5 min). Dans un deuxième temps, je laisserai les élèves prendre connaissance du problème individuellement afin de s'imprégner de celui-ci (la dévolution) (\approx 5 min).

Puis, viendra le temps de la mise et du travail en groupe (≈ 25 min). La classe de 6^{ème} ayant un effectif de 24 élèves, six groupes de quatre seront donc établis. La constitution des groupes sera imposée, je prendrai en compte deux paramètres. Le premier étant l'hétérogénéité du groupe afin de permettre une entrée dans le problème pour tous les groupes. Le deuxième paramètre serait plutôt d'ordre « social », en effet, c'est une classe agitée où plusieurs tensions demeurent entre élèves dues aux comportements difficiles de certains. De plus, la plupart des élèves sont « sans filtre », cela peut créer des mal-être. De nombreux élèves souffrent de l'ambiance de classe. Il y a donc des élèves à ne pas mettre ensemble. Concernant la trace écrite des élèves, chaque groupe aura une feuille pour rédiger la réponse au problème. Pendant la phase de recherche, les élèves auront droit à la calculatrice, à leur cahier d'exercices, leur cahier de leçons... tout ce qui sera susceptible de les aider (ce seront les mêmes conditions qu'au vrai concours).

La dernière phase sera la phase de mise en commun (≈ 15 min). Cette phase consistera à faire exposer les solutions de chaque groupe au tableau. L'utilisation de l'outil caméra bureau permettra de projeter à l'ensemble de la classe la production de chaque groupe, le groupe aura donc à expliciter et défendre sa démarche. Ce dernier temps a pour but de susciter le débat, de comparer les solutions ou méthodes trouvées, de discuter des éventuels blocages ou erreurs rencontrés.

Plusieurs méthodes de résolutions sont envisageables, nous allons les lister.

Procéder par essais-erreurs pour déterminer le prix d'un dinosaure en respectant les contraintes de l'énoncé : s'il en achète 3 alors il lui reste 15€, mais s'il en achète 5 alors il lui manque 11€. Ayant déterminé ce prix (13€), soit on peut chercher le prix de 4 dinosaures (52€) et la somme d'argent que Tom possédait ($3 \times 13€ + 15€ = 54€$) et en déduire qu'il peut acheter les 4 dinosaures car ils coûtent 52€ et qu'il lui restera 2€ ($54€ - 52€$). Ou bien, en ayant le prix d'un dinosaure (13€), nous pouvons remarquer qu'avec les 15€ qu'il lui reste après achat des 3 dinosaures, il peut encore en acheter un puisque 1 dinosaure coûte 13€, il lui reste donc 2 € ($15€ - 13€$). Ou bien, en ayant le prix d'un dinosaure, nous pouvons remarquer qu'avec les 11€ qu'il lui manque après le souhait

d'acheter les 5 dinosaures, s'il en repose un, il aura donc 13€ à payer en moins, il lui restera même 2 € (13€ - 11€). Dans ces deux derniers cas, nous ne sommes pas obligés de trouver le prix des 4 dinosaures.

Procéder par déductions pour déterminer le prix d'un dinosaure : la différence de prix entre 3 dinosaures et 5 dinosaures est égale à 26€ (15€ + 11€). Elle correspond donc au prix de 2 dinosaures, on peut donc trouver le prix d'un dinosaure. Puis, nous terminons en utilisant l'un des raisonnements qui précèdent.

Procéder avec un traitement algébrique qui permet de résoudre plus « facilement » le problème : si nous notons S la somme d'argent que possède Tom, puisqu'il lui reste 15€ après achat de 3 dinosaures ($3D \rightarrow S + 15$), s'il en achète 5, il lui manque 11€ ($5D \rightarrow S - 11$) alors s'il achète 8 dinosaures, il devra payer 2 fois la somme qu'il possède et il lui restera 4€ ($8D \rightarrow 2S + 4$). Pour 4 dinosaures, donc 2 fois moins, il payera la somme qu'il possède et il restera 2€. Ici, on ne passe pas par le prix d'un dinosaure, c'est une remarque que les élèves peuvent avoir du mal à comprendre puisque la question porte sur l'achat de 4 dinosaures donc l'habitude sera de calculer le prix d'un dinosaure puis multiplier par 4 ou de calculer le prix de 4 dinosaures pour ensuite en déduire la réponse. On note alors que l'énoncé peut se classer dans le domaine Algèbre et équation mais celui-ci est secondaire car les procédures des élèves de 6^{ème} ne feront pas appel à des procédures algébriques.

Plusieurs difficultés sont à relever ; comme la plupart de ce type de problème, il faut pouvoir débiter l'exercice, comprendre toutes les données de l'énoncé et trouver un lien entre elles. Par exemple, il faut comprendre que le prix de trois dinosaures augmentés de 15€ est égal au prix de 5 dinosaures diminué de 11€. La compréhension de l'énoncé peut être compliqué, je pense notamment à quelques élèves dyslexiques pour qui cette première tâche sera un obstacle. Les accompagner et/ou les encourager lors d'une deuxième relecture à schématiser la situation peut être une aide. La difficulté à entrer dans le problème peut provoquer un obstacle psychologique. Le travail en groupe pourra constituer une aide à surmonter cet obstacle.

3. Description de la situation didactique en langage commun

Le tableau ci-dessous permet d'avoir une vue d'ensemble de la séance filmée.

Tps	Etape didactique	Organisation	Description du contenu
De 02 :32 à 06 :43	Phase 1 : La mise en place des consignes	Classe entière	La professeure explique l'objectif de la séance, donne des recommandations générales puis axe des consignes sur la résolution du problème mathématique tiré du RMT qui occupera toute la séance.
De 07 :00 à 12 :00	Phase 2 : Recherche individuelle	Travail individuel	Chacun prend connaissance du problème (individuellement) afin de se l'approprier. Des débuts de recherches sont menés sur le cahier d'exercices, cela permet d'apporter des premiers éléments de réponses lors de la mise en groupe. La professeure intervient auprès des élèves dyslexiques et des élèves les plus en difficulté pour reformuler l'énoncé et s'assurer que la compréhension du problème est comprise.
De 13 :27 à 18 :01	Phase 3 : Recherche en groupe	Petits groupes	La classe s'organise en 6 groupes de 4 élèves. Les groupes ont été constitués par la professeure de façon hétérogène. Chaque groupe doit mener une réflexion et rendre une production écrite. La professeure intervient auprès de chaque groupe afin de les aider et de lever certaines interrogations.
De 32 :39 à 40 :58	Phase 4 : La mise en commun	Classe entière	C'est la phase de correction, chaque groupe vient présenter au tableau sa solution. La professeure rythme les passages, relève les points clés et synthétise les démarches.

Synopsis de la séance filmée le 14 janvier 2020 ; établissement : Collège Albert Mathiez à Marnay ; Niveau de la classe : 6^{ème} ; Nombre d'élèves : 24.

Il s'agit d'un épisode qui se déroule en cours de mathématiques, au mois de janvier. Les élèves sont filmés hors concours. Ils ont à résoudre en groupe un problème tiré du RMT. La résolution se déroule en groupe puisque ces types de problèmes sont complexes pour être traités seul. Une séance du même type s'était déroulée au mois de décembre pour un entraînement au concours.

L'extrait a été découpé en 3 parties : un premier épisode sur la/les consigne(s) donnée(s) aux élèves par la professeure. Une deuxième partie sur les échanges à l'intérieur d'un groupe puis une troisième partie sur les échanges en classe entière. La transcription des échanges est à voir en Annexe.

Premier extrait : La mise en place des consignes.

La professeure est très présente en ce début de séance, elle explique les objectifs de la séance qui est un peu particulière à cause de la caméra au fond de la classe. Elle explique le déroulement précis de la séance : les différentes phases et le temps prévu, comment disposer les tables pour la mise en groupe, que faut-il avoir à sa disposition pour faire le travail. Voici quelques phrases énoncées par la professeure : « cette séance va me servir à voir comment vous travaillez en groupe » - *transcription 1* ; « vous prenez votre cahier d'exercices pour prendre des notes pendant ces 5 minutes » ; « j'ai disposé les tables de telle sorte à ce que vous avez juste une table à pousser et à mettre contre la deuxième comme ça, vous formez un bloc » ; « Pendant 25 minutes, vous faites en groupe, je vous distribuerai une feuille parce qu'il faudra rédiger la solution du problème sur une feuille » - transcriptions 3.

Elle distribue un énoncé à chaque élève puis lit à voix haute le problème après avoir refusé à un élève la lecture du problème par ses soins. Les élèves recherchent ensuite individuellement pendant 5 minutes.

On remarque que quelques questions apparaissent sur l'organisation du travail, tels que : « Est-ce qu'on peut faire ensemble ? » - *transcription 4* ; « Est-ce qu'on la colle la feuille ? » - *transcription 6* ; « Mais on peut surligner ou... ? » - *transcription 10*. La professeure répond à toutes ces interrogations.

Deuxième extrait : Zoom sur un groupe lors de la résolution du problème.

Voici un premier moment qui se passe au début du travail collectif.

Lors de la mise en groupe, Victor expose son idée : « A mon avis, comme pour 3 dinosaures, il reste 15€. Avec 5, il lui manque 11€ et $15 + 5,5 = 20,5$. Donc un dinosaure coûte 20€50. » - *transcription 17*. La professeure lui demande plus d'explications sur son raisonnement : « Pourquoi 5,5 ? » - *transcription 18* - que Victor essaye de donner : « Bah parce que, pour en acheter encore 2, il manque 11€ et $11 \div 2 = 5,5$ et après $15 + 5,5$ ça fait 20,5 » - *transcription 19*. Elle ne donne aucune évaluation de son raisonnement et demande au reste du groupe le ressenti de chacun concernant la réponse apportée par Victor. Les réponses diffèrent d'une personne à l'autre. L'élève Jean n'est pas d'accord avec le raisonnement de Victor, la deuxième élève Juliette est hésitante et la troisième personne, Axel, recommande de vérifier la réponse proposée par Victor. La professeure leur suggère alors de vérifier puis propose ensuite de s'intéresser à l'idée de Jean.

Regardons un deuxième moment au sein du groupe qui se déroule peu après le premier moment (1 min 30 s après la fin du premier échange).

Toujours dans la réflexion, le groupe arrive à une nouvelle solution. Jean a profité d'un début de raisonnement oralisé par Victor pour mener à bien son raisonnement. Ci-dessous un extrait de transcriptions – *transcriptions 36 à 41* :

- « Je sais, il faut faire $15 +$ euh 11 », dit Victor
- « Oui voilà c'est ça », dit Jean en bondissant de sa chaise
- « égal » ajoute Victor
- « 26. Diviser par 2. 13 », continue Jean
- « 13 », confirme Victor
- « Donc 1 dinosaure coûte 13€ » conclut Jean.

Les deux autres élèves essayent de suivre leur raisonnement. Quand la professeure revient, celle-ci invite Jean à lui expliquer sa démarche. La seconde explication permet de faire émerger des incompréhensions de la part des élèves : « Ah, Axel demande pourquoi c'est 2. » - *transcription 51*. La professeure ne donne de nouveau aucune affirmation ou

infirmation à cette nouvelle réponse et laisse les élèves s'expliquer les choses. La professeure intervient pour résumer un propos ou pour mettre en évidence les incompréhensions des personnes.

Troisième extrait : La mise en commun

Deux méthodes ont été traitées dans les groupes : la méthode par essai-erreur et la méthode par déduction. Nous décrivons donc dans ce troisième et dernier extrait deux passages afin de mettre en avant les échanges concernant les deux méthodes. Les deux groupes présentés ci-dessous sont les deux groupes à être passés en premier, dans l'ordre suivi par la description suivante.

Groupe n°1 – Méthode par essai-erreur

La professeure motive le passage de la mise en commun : « Aller, là ça va être intéressant parce que les groupes vont confronter leur solution. » - *transcription 60* – et met en place le premier groupe constitué de 3 élèves. La production du groupe est vidéo projetée mais la projection n'est pas de bonne qualité.

La production du groupe que l'on nommera « groupe n°1 » est en Annexe.

Hugo commence à exposer les calculs à la classe, un peu hésitant et avec quelques oublis. Après un premier essai qui n'a pas abouti (en prenant 15€ pour le prix d'un dinosaure), la professeure intervient en demandant à toute la classe si elle comprend la méthode utilisée afin que tous les élèves suivent dès le début. Les réponses de la classe traduisent une incompréhension générale : « Non », « Pas du tout », « Pas trop » - *transcription 67*. En réaction à ses réponses, la professeure demande au groupe de reprendre et d'expliquer l'idée de leur raisonnement. Angéline prend directement la parole et explique à la classe la méthode : « Bah on s'est dit qu'il fallait faire fois 3 plus 15. Quelque chose fois 3 plus 15 et euh quelque chose fois 5 moins 11. Et il fallait que ça fasse le même résultat sinon ça ne marchait pas. » - *transcription 69*. On remarque que

cet élève a compris le problème et est capable, en parti, de l'expliquer. La professeure intervient alors pour sonder une nouvelle fois la classe : « Alors là est-ce que vous êtes d'accord ? » - *transcription 70*. Un seul élève répond par l'affirmation. La professeure résume l'idée que l'élève a exposé. Un élève manifeste son incompréhension qui est ignoré par la professeure et qui ajoute que la méthode présentée est une méthode par essai-erreur. La professeure suggère au groupe de continuer leur raisonnement devant la classe, Angéline continue d'elle-même en reprenant les calculs d'Hugo, c'est-à-dire en testant avec le prix d'un dinosaure égal à 15€. La professeure n'intervient pas et laisse exposer les calculs face à la classe. Hugo offre à la classe leur second essai en prenant 14€ pour le prix d'un dinosaure. Angéline finit avec le dernier essai qui amène à la solution, en prenant 13€ pour le prix d'un dinosaure : « Après on a essayé 13×3 ça faisait 39, euh $39 + 15$, ça faisait 54 et 13×5 c'est 65 et $65 - 11$ c'était égal à 54. Donc euh comme c'est 54 et 54, euh... ça marchait » - *transcription 83*. La professeure leur demande alors de conclure en répondant à la question posée. Angéline conclut en expliquant qu'il a assez d'argent pour acheter 4 dinosaures, et qu'il lui restera même 2€. La troisième personne du groupe que l'on n'a pas entendu jusqu'à présent finit avec cette phrase : « Donc il pourra s'acheter une glace » - *transcription 87*. La professeure ne réagit pas et conclut avec ce groupe en résumant de nouveau le raisonnement et en validant la méthode qui a été proposée par ce premier groupe.

Groupe n°2 – Méthode par déduction

Le second groupe qui a été filmé lors de la phase collective vient présenter sa solution. Il est constitué de 4 élèves. Victor tente d'exposer leur raisonnement : « Bah nous on a essayé de trouver combien faisait.... Enfin c'était quoi le prix du dinosaure. On a fait $13 + 11$, ça fait 26. Diviser par 2, ça fait 13 [...] » - *transcriptions 89 – 91*. Il se reprend dans un calcul, certainement dû aux remarques des autres élèves du groupe. La professeure intervient afin d'obtenir plus de précision sur le calcul suivant : $15 + 11$. Une première réponse est donnée : « parce qu'on voulait trouver le prix d'un dinosaure » - *transcription 93* – mais visiblement la réponse n'est pas celle attendue par la professeure

qui retente la question. Les élèves continuent leur raisonnement, la question posée par la professeure ne semble pas avoir été comprise. Elle laisse donc pour le moment sa question de côté et continue avec le raisonnement que propose les élèves du groupe. La professeure rappelle le vocabulaire mathématique rencontré lors des échanges tel que « inférieur à » qui doit être acquis en fin de cycle 3. Une fois la réponse au problème donnée, la professeure repose de nouveau sa question : « D'où vient votre 26 ? » - *transcription 101*. Et Juliette répond, à juste titre, que c'est la somme de 15 et de 11. N'ayant toujours pas la réponse attendue des élèves, la professeure oriente la question à Jean, l'élève qui avait trouvé le raisonnement lors du travail de groupe. Après plusieurs hésitations, Jean se lance dans l'explication. La professeure reprend avec lui ses propos afin de l'encourager pour la suite et de le mettre en confiance. Une élève lève la main pour que son groupe vienne présenter sa méthode. À la suite de cette intervention, la professeure écourte la phase d'explications qu'elle attendait en demandant à la classe si la méthode a été comprise, et la classe atteste.

Cette première description tente de décrire en langage commun certains passages de ce qu'il s'est passé dans la classe lors de la résolution d'un problème.

Cependant cette première description laisse de côté certains éléments qui semblent nécessaire de décrire.

Nous essaierons de traduire des éléments à l'aide des notions-modèles étudiées dans la partie théorique.

4. Re description à l'aide de notions modèles

Partie analyse du premier extrait : La mise en place des consignes.

La façon de s'adresser aux élèves grâce aux pronoms personnels influence l'activité mathématique des élèves au cours de la séance. On remarque que la professeure s'adresse directement aux élèves : « **vous allez** travailler sur un problème » ; « **vous allez** devoir utiliser » ; « c'est **votre** premier rôle » - *éléments de la transcription 1*. Cela met implicitement les élèves en situation de recherche et de responsabilité. Les précisions sur les rôles des élèves peuvent jouer sur l'implication réservée aux élèves.

La présentation du problème : « vous allez devoir utiliser les opérations et les nombres » - à la *transcription 1* - ainsi qu'une première lecture de l'énoncé ont des impacts importants dans la dévolution laissée aux élèves. L'énoncé est un élément du milieu didactique, ici le problème présente des phrases claires et compréhensibles qu'il faudra traduire en langage mathématique. C'est pourquoi la première lecture est faite par la professeure qui connaît le problème et non par un élève qui le découvre. Si c'était le cas, cela ne permettrait pas, dans un premier temps, à l'élève « lecteur » de s'approprier et se concentrer sur le problème. Dans un deuxième temps, cela pourrait nuire aux autres élèves qui ne bénéficieraient peut-être pas d'une lecture fluide et correctement rythmée par la ponctuation du texte.

On remarque qu'il n'y a pas de précisions données sur les difficultés laissées aux élèves. L'engagement dans le travail n'est donc pas modifié.

On peut assimiler cette première présentation de la part de l'enseignante à du contrat didactique, la négociation se décline en deux composantes qui sont visibles lors de cette première phase :

- Le domaine mathématique : ici, la professeure place le problème dans le domaine arithmétique ce qui permet aux élèves d'accéder plus facilement ou rapidement à certaines techniques propres au domaine considéré. La professeure leur dit

qu'ils savent ce qu'est résoudre un problème en mathématique, que ce sont des nombres donc sous-entendu qu'il faut faire des calculs.

- Le partage de responsabilités : comme vu au paragraphe précédent, l'enseignante donne une responsabilité aux élèves en s'adressant au groupe classe. Elle explique qu'ils vont chercher seul puis en groupe.

On remarquera que l'enseignante insiste sur une phrase : « je vous laisserai 5 minutes pour prendre connaissance du problème » ; « donc pendant ces 5 minutes, je ne veux aucun bruit » ; « vous prenez votre cahier d'exercices pour prendre des notes pendant ces 5 minutes » ; « on le lit ensemble et je vous laisse 5 minutes » - *transcriptions 3*. Cette insistance concernant la durée de prise de connaissance du problème individuel peut laisser penser que la professeure accorde de l'importance à ce moment, cette recherche individuelle est un moment crucial pour les élèves dans l'appropriation du problème. De leur côté, les élèves doivent également percevoir ce moment important à travers les paroles répétées de la professeure : l'enseignante attend qu'ils fassent preuve de concentration et de recherche durant ce temps. De plus, nous rappelons que c'est une classe de 6^{ème} filmée au mois de janvier. Les élèves doivent être canalisés et les consignes répétées afin d'acquérir plus d'autonomie.

Les diverses questions concernant l'organisation du travail peuvent traduire le fait que la professeure donne beaucoup d'informations en même temps et que les élèves ne peuvent donc pas emmagasiner toutes ces informations.

Ici la professeure a utilisé une manière d'agir classique. Les élèves ont à prendre connaissance du problème individuellement puis une mise en groupes pour la résolution du problème et enfin une mise en commun des solutions trouvées.

L'intervention de l'enseignante détermine la responsabilité laissée aux élèves dans la résolution du problème donc le contrat didactique et modifie la tâche de l'élève donc le milieu.

Partie analyse du deuxième extrait : Zoom sur un groupe lors de la résolution du problème.

Dans un premier temps, nous pouvons reprendre et analyser ce court passage composé de 3 échanges - *transcriptions 17, 18, 19* :

- Victor : « A mon avis, comme pour 3 dinosaures, il reste 15€. Avec 5, il lui manque 11€ et $15 + 5,5 = 20,5$. Donc un dinosaure coûte 20 euros 50. »
- P : « Pourquoi 5,5 ? »
- Victor : « Bah parce que, pour en acheter encore 2, il manque 11€ et $11 \div 2 = 5,5$ et après $15 + 5,5$ ça fait 20,5. »

Les actions menées par les élèves du groupe conduisent à réaliser des calculs avec des nombres décimaux qui se modélisent comme du argent. Ils utilisent leurs connaissances antérieures pour avancer dans un raisonnement qui les mènerait à la solution du problème mathématique.

Ici, l'élève n'a pas répondu au problème initial, il a donné le prix d'un dinosaure, cela s'opère comme une modification du milieu. Cette manière de faire repose sur les habitudes au quotidien, dans un contexte concret (achat dans un magasin). Pour savoir s'il peut acheter ou non 4 dinosaures, les habitudes mènent donc au calcul d'un seul dinosaure. Ensuite, en multipliant le prix d'un dinosaure par 4, et en comparant le prix obtenu avec la somme d'argent en poche, nous allons en déduire si oui ou non nous allons pouvoir acheter les dinosaures, et si cela est le cas, nous connaissons s'il reste de l'argent ou non en enlevant la somme à payer à l'argent en poche. Autrement dit, les élèves vont devoir aborder ce qui fait problème, à savoir trouver le prix de 4 objets identiques sachant que le prix de 3 objets augmenté de 15€ est égal au prix de 5 objets diminué de 11€. Le milieu didactique modélise ce problème et ce problème évolue : nos habitudes conduisent ici à modifier le problème. C'est en prenant appui sur des habitudes et sur des connaissances mathématiques que les élèves peuvent résoudre ce qui fait problème.

Lors de la proposition de la solution, la professeure ne rejette pas la réponse proposée ni ne met à défaut une étape de raisonnement mais demande plus d'informations. Dans le cas contraire, le temps didactique aurait été accéléré. On aurait rejeté la réponse et on

aurait essayé de trouver une autre solution. Ici, les diverses réponses des autres élèves concernant la proposition de Victor donnent un indice sur l'état de connaissance du problème.

On peut également identifier ce passage comme une limite du contrat didactique ; en effet, l'élève lie les nombres et les opérations sans donner du sens à ses calculs et à ses résultats.

La professeure retourne l'idée exposée aux autres élèves du groupe afin d'impliquer tous les membres du groupe. Axel propose de vérifier la réponse de Victor « Mais pour être sûr, on fait l'inverse. $5,5 \times 3$ et $5,5 \times 5$ comme ça ... » - *transcription 23*. Nous avons à faire, de nouveau, à une modification du milieu : à l'instant présent, le but n'est plus de répondre au problème initial (lui restera-t-il de l'argent ?) mais d'accepter ou de rejeter la solution proposée par un élève en vérifiant par des calculs. Ici, le problème fournit des rétroactions aux élèves en donnant la possibilité de valider ou d'invalider leur travail. Les rétroactions du milieu à ce moment-là vont permettre de remettre en cause la manière d'agir des élèves.

A la transcription 25, la professeure dit : « Il veut vérifier si la réponse de Victor est juste (*en s'adressant à Juliette et Jean*). Essayez... Essayez et ensuite vous verrez, puis Jean il aura peut-être une idée aussi à vous proposer ». La professeure suggère aux élèves de regarder une autre solution. Cela peut laisser penser que la production de Jean est correcte. On peut assimiler ce passage à un effet Topaze (Brousseau, 1984).

Les élèves ont donc une première réponse fausse. La professeure arrive, sans contredire la réponse proposée mais elle va inciter les élèves à regarder la production de Jean. L'effet Topaze négocie le sens du comportement des élèves. Ici, les élèves ne vont pas rentrer dans le jeu de la vérification proposée, à juste titre, par un élève du groupe mais va passer directement à une autre solution, que Jean va essayer de faire valoir. D'ailleurs, quelques minutes plus tard, une solution correcte aboutira.

Cette situation didactique met en avant le fait que la professeure prend à sa charge l'essentiel du travail, ou, du moins les grands axes qui vont être déterminants pour la suite du problème. Dans notre cas, la professeure donne explicitement le « chemin » à

suivre : regarder la production de Jean. Elle tente de faire savoir aux élèves ce qu'elle veut qu'ils fassent mais ne peut pas le dire de manière explicite. Les élèves doivent alors essayer de « décoder » les attentes, les indications de l'enseignante.

Sous les contraintes du contrat didactique, la professeure est conduite, au cours des échanges avec les élèves à délaissier une situation d'apprentissage qui est la suivante : après avoir vérifié et donc rejeté leur première solution, qu'allaient-ils décider de faire ? Afin de pouvoir résoudre le problème mathématique et de rencontrer de nouvelles situations d'apprentissages, l'élève doit développer sa capacité à chercher en se posant de nouvelles questions.

L'échange qui vient ensuite montre que c'est Jean, seul, qui mène le raisonnement. Victor ne fait que répéter ou donner le résultat d'un calcul dicté par Jean. Mais c'est peut-être grâce à Victor que Jean arrive à prendre une place et à exposer son raisonnement. Ici, les calculs sont modélisés par la notion de contrat didactique.

Lors de cette phase d'analyse, on remarque, grâce à une description plus approfondie, que moins d'élèves se sentent concernés et s'investissent dans le travail. Le sens de la réponse est modifié pour certains élèves qui n'ont pas eu accès au raisonnement.

Partie analyse du troisième extrait : La mise en commun.

Groupe n°1 – Méthode par essai-erreur

Analysons la fin de la présentation du groupe qui donne à voir quelques éléments ; d'un côté, les élèves cherchent le prix d'un dinosaure et le justifient avec les calculs : « Après on a essayé 13×3 ça faisait 39, euh $39 + 15$, ça faisait 54 et 13×5 c'est 65 et $65 - 11$ c'était égal à 54. Donc euh comme c'est 54 et 54, euh... ça marchait. » - *transcription 83*. Ce sont des éléments contractuels.

De l'autre côté, la professeure attend la réponse au problème posé et fait alors revenir au milieu initial. En effet, le problème initial a été écarté, cela peut s'expliquer par le

cheminement du raisonnement : leur idée a été de trouver le prix **d'un seul dinosaure** puis de conclure grâce à cette donnée. On peut déduire, à travers ce raisonnement, une modification de milieu pour répondre au problème final, les élèves ont dû construire plusieurs étapes pour y parvenir. Il y a une décomposition du problème en sous-problèmes (Houdement, 1999). Ces sous-problèmes peuvent être modélisés comme des changements de milieux.

L'élève insiste pour la deuxième fois : « Euh, 13. On a fait 13×4 , ça fait 52. Ça faisait 52, 13×4 et du coup, oui il en avait assez, et il avait même 2€ en plus. » - *transcription 85*. Dans les deux cas, l'élève part de 13 et conclut. Dans les deux cas, la professeure acquiesce.

La dernière phrase de cet échange est donnée par l'élève du groupe que l'on n'a pas entendu durant cette présentation : « Donc il pourra s'acheter une glace ! » - *transcription 87*. La professeure n'a rien répondu. Cette phrase, qui, à priori a pour intention de faire rire ou sourire peut conduire à plusieurs interprétations : est-ce du recul par rapport au problème mathématique (l'élève a réussi à revenir au contexte de l'exercice et propose une suite plausible : aller acheter une glace avec les 2€ restant) ? Ou n'est-elle plus dans le problème ? Ou bien l'élève et le professeur ne sont pas au même « endroit » ?

Pour un « bon fonctionnement » de la classe, les enseignants attendent quelque chose des élèves, les élèves attendent quelque chose de l'enseignant et ce « quelque chose » traite de l'enseignement et de l'apprentissage. L'efficacité de la relation dépend de la bienveillance mutuelle des intentions de l'autre.

Cette prise de parole soulève alors un point important aux limites du contrat didactique : les différences d'attentes entre les élèves et le professeur. L'absence de réponse de la part de la professeure montre d'ailleurs le « décalage » entre l'élève et la professeure : l'enseignante ne s'attendait pas à cette remarque, elle a été surprise.

Groupe n°2 – Méthode par déduction

Revenons sur un passage précis lors de la mise en commun avec ce deuxième groupe, et pour cela, appuyons-nous sur des échanges – *transcriptions 91 à 102*.

Les élèves du groupe expliquent leur démarche, la professeure leur demande de justifier un calcul en particulier : pourquoi avoir additionner 11 à 15 ? La professeure cherche à connaître les origines du calcul. Mais les échanges sont peu fructueux. Nous pouvons modéliser le calcul « $15 + 11$ » par la notion de milieu. Le problème est de trouver les raisons de ce calcul.

Au cours des interactions, on s'aperçoit qu'une incompréhension est présente : les élèves ne comprennent pas ce que la professeure attend d'eux. On retrouve, là aussi, une différence d'attente entre la professeure et les élèves.

Ils en viennent donc à la réponse qu'ils veulent donner depuis le début, à savoir le prix d'un dinosaure. Donc les élèves s'appuient sur des éléments de contrat pour trouver le prix d'un dinosaure et ensuite ils pourront résoudre le problème. Ce sont les éléments contractuels.

On peut alors se poser la question : « pensent-ils que ce qui intéresse la professeure est seulement la réponse ? », même si, dans notre cas, la réponse au problème posé n'est pas celle avancée par le groupe mais elle constitue néanmoins une étape importante dans la résolution du problème. Or, la professeure n'attendait pas la réponse. Ce qui l'intéressait était de verbaliser le raisonnement mené par les élèves : « pourquoi / comment avoir pensé qu'il fallait additionner 15 et 11 ? ».

Ce point est un élément supplémentaire qui vient s'ajouter à la limite du contrat didactique. Souvent, on peut s'apercevoir, lors d'exercices, que le seul but de l'élève est d'avoir la réponse. Cette attitude enlève le plaisir de chercher et met de côté les compétences mathématiques qui sont de plus en plus présentes dans l'enseignement des mathématiques.

V. Conclusion

La dévolution à la résolution du problème mathématique évolue en grande partie par les actions de l'enseignant, celui-ci détermine la responsabilité des élèves, il peut placer le problème dans un certain domaine mathématique afin d'accéder de manière privilégiée à certaines techniques propres au domaine considéré, il peut désigner le degré de familiarité de l'élève à propos du savoir mis en jeu. Le contrat didactique dépend toujours des connaissances mises en jeu. Un lien peut se faire avec l'analyse du premier épisode collectif, la mise en place des consignes et la présentation du problème par le professeur orientent les élèves vers des éléments du contrat.

Le contrat est alors l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus par les élèves, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant, ceci, dissimulées sous des règles plus ou moins explicites.

Le travail en collaboration face à la résolution d'un problème mathématique permet en général de maintenir une motivation mais cela n'est pas systématique comme nous avons pu le constater lors de certains échanges. L'enseignant a donc ici un rôle primordial à prendre lorsque les élèves sont confrontés à un problème mathématique, il doit anticiper et surveiller. Au sein des échanges, le milieu didactique évolue : ce qui fait problème se modifie en fonction des interactions entre élèves et entre élèves-professeur. Le professeur doit donc veiller à ne pas trop influencer les élèves mais doit, en même temps, permettre aux élèves d'évoluer dans le problème. Ainsi, le professeur peut avoir des difficultés à orienter les élèves vers des éléments du milieu. Une différence d'attente entre le professeur et les élèves peut aussi se créer dans les situations didactiques et influencer sur l'apprentissage des savoirs. Les épisodes 2 et 3 analysés peuvent illustrer ces propos et montrent également la difficulté du professeur à trouver un « juste milieu » sans tomber dans certains effets nuisant au contrat didactique tel que l'effet Topaze.

Les rétroactions du milieu doivent permettre de remettre en cause la manière d'agir des élèves mais ne signifient pas que les élèves vont pouvoir résoudre le problème mathématique grâce à leurs connaissances. Un blocage, que l'on peut appeler la résistance du problème doit amener le professeur à introduire une nouvelle notion.

VI. Bibliographie

Brousseau G. (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Brousseau G. (2003), Sur l'introduction du calcul littéral, *Bulletin de l'APMEP*, 445, pp. 197 – 213, Paris.

Castella, Mercier C. (1996). Peut-on enseigner des méthodes ? *Petit x*, IREM de Marseille.

Collectif Didactique Pour Enseigner, CDpE (2019). *Didactique pour enseigner*. Presses Universitaires de Rennes.

Gueudet G. Le Poche G. (2006). Séquence de résolution de problèmes complexes : quelle mise en œuvre ? *Grand N*, N°77, IREM de Rennes.

Hersant M. (2008). Problèmes pour chercher, des conduites de classes spécifiques. *Grand N*, N°81, Université de Nantes.

Houdement C. (1998). Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes ». *Grand N* N°63, IREM de Grenoble.

Houdement C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N* N°71, IREM de Grenoble.

Houdement C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N* N°100, IREM de Grenoble.

Joffredo-Le Brun S. (2016). Enseignement et apprentissage des mathématiques au CP : continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation, un exemple. *Questions Vives*, N°25.

Julo J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?
Grand N, N°69, IREM de Rennes.

Rogalski M. (1990-1989). Enseigner des méthodes en mathématiques, IREM de
Rennes.

Sitographie

« Mathématiques – Ressources au cycle 4 – Éduscol ». Consulté le 23 décembre
mai 2019.

<https://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle-4.html>.

APMEP. « Organisation Du 28^e RMT En Franche-Comté ». APMEP. Consulté
le 15 octobre 2019.

<https://www.apmep.fr/Organisation-du-28e-RMT-en-Franche>.

VII. Annexes

Annexe 1 : Énoncés des trois problèmes mettant en avant la rupture du contrat didactique

Problème 1

Soient les fonctions définies par :

$$f \quad x \text{ -----} \rightarrow f(x) = 345x - 1250$$

$$g \quad x \text{ -----} \rightarrow g(x) = -187x + 1931$$

1°) Les représenter graphiquement.

2°) Déterminer les coordonnées de leur intersection, par le graphique et par le calcul.

Problème 2

Au marché de Saint-Charles, on a observé la variation des quantités de salades en fonction du prix p en francs du kilogramme de salade.

$$\text{Quantités offertes : } Q_O = 345p - 1250$$

$$\text{Quantités demandées : } Q_D = -187p + 1931$$

1°) Calculer Q_O et Q_D pour $p = 4$ et $p = 8$.

2°) Représenter graphiquement ces fonctions pour p compris entre 3,7 et 9 F.

3°) Pour quel prix, en francs, $Q_O = Q_D$?

4°) Pour quel intervalle de prix a-t-on une offre supérieure à la demande ?

Problème 3 :

Au marché de Saint-Charles, on a observé les lois de l'offre et de la demande de salades en fonction du prix p , en francs (p est le prix au kilo).

$$\text{Offre : } Q_O(p) = 345p - 1250$$

$$\text{Demande : } Q_D(p) = -187p + 1931$$

1°) Quelle est la fonction croissante, la fonction décroissante, pourquoi ?

2°) Déterminez graphiquement le prix d'équilibre.

3°) Ces fonctions ne prennent un sens que pour un prix positif, et les quantités doivent elles aussi être positives : sur quel intervalle de prix Q_O a-t-elle un sens ? sur quel intervalle de prix Q_D a-t-elle un sens ?

4°) Calculer le prix maximum du marché, sachant que l'offre est limitée à 4325.

5°) Calculer le prix d'équilibre.

[Annexe 2 : Enoncé du problème présenté en classe de 6^{ème} pour mon expérimentation](#)

TROIS, QUATRE OU CINQ DINOSAURES ?

Avec son argent, Tom veut s'acheter des modèles de dinosaures. Dans le magasin de jouets, ces modèles sont tous au même prix.

Tom constate que :

- s'il achète trois dinosaures, il lui restera 15€
- mais pour acheter cinq dinosaures, il lui manque 11€.

Tom a-t-il assez d'argent pour acheter quatre dinosaures ?

Si oui, combien d'argent lui restera-t-il ?

Si non, combien d'argent lui manquera-t-il ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

[Annexe 3 : Transcription de la séance filmée](#)

Consignes :

1.	P	Alors, je vous explique la séance d'aujourd'hui. Chut. Donc vous allez travailler sur un problème de RMT. On peut voir ça comme un deuxième entraînement. Mais là tous les groupes auront le même sujet, d'accord. Comme ça à la fin on pourra comparer les résultats et avoir un débat. Donc tout le monde a le même sujet. C'est un problème où vous allez devoir utiliser les opérations et les nombres, ça c'est votre premier rôle : essayer de résoudre le problème. Et le deuxième rôle : cette séance va me servir à À voir comme vous travaillez en groupe et puis voir comment on peut faire des maths avec les élèves. D'accord ? C'est pour ça que cette séance est un petit peu spécial.
----	---	---

		Donc je vous distribue à chacun un problème. Emile... Lilian
2.	Lilian	Oui.
3.	P.	<p>Vous m'écoutez. Je distribue à tout le monde un problème. On va lire l'énoncé ensemble, ensuite je vous laisserai 5 minutes pour prendre connaissance du problème. Donc pendant ces 5 minutes, je ne veux aucun bruit, tout le monde prend connaissance du problème, vous prenez votre cahier d'exercices pour prendre des notes pendant ces 5 minutes. Ensuite, pendant 25 minutes on se met en groupe. Donc vous avez vu, j'ai disposé les tables de telle sorte à ce que vous avez juste une table à pousser et à mettre contre la deuxième comme ça vous former un bloc.</p> <p><i>P montre avec des gestes la mise en place des îlots.</i></p> <p>Pendant 25 minutes... Chut. Pendant 25 minutes, vous faites en groupe, je vous distribuerai une feuille parce qu'il faudra rédiger la solution du problème sur une feuille, une feuille par groupe qu'on ramassera à la fin et c'est cette feuille là qu'on va ensuite analyser à la fin. Chaque groupe nous présentera sa rédaction. D'accord ?</p> <p>Donc pour l'instant je vous distribue le problème, on le lit ensemble et je vous laisse 5 minutes. Là c'est cahier d'exercices pendant 5 minutes et on prend des notes. <i>P distribue les feuilles.</i></p> <p>Oui Victor ?</p>
4.	Victor	Est-ce qu'on peut faire ensemble ?
5.	P.	<p>Pas tout de suite, là c'est individuellement pendant 5 minutes, pas de bruits.</p> <p><i>P continue à distribuer.</i> Chut, là c'est 5 minutes sans bruits, c'est important que vous preniez connaissance tout seul du problème.</p> <p><i>Victor lève une seconde fois la main</i></p>
6.	Victor	Est-ce qu'on la colle la feuille ?
7.	P.	<p>Vous pouvez la coller maintenant si vous avez envi, si vous préférez travailler déjà avec la feuille sans la coller, il n'y a pas de soucis.</p> <p>Je lis ensemble avec vous et ensuite 5 minutes tout seul. <i>Thibaut lève la main.</i></p> <p>Thibaut ? Si c'est une question sur le problème, pas pour l'instant.</p>

8.	Thibaut	Non, c'est pour lire le problème.
9.	P.	<p>Non je vais le lire, ok ? Alors, avec son argent, Tom veut s'acheter des modèles de dinosaures. Dans le magasin de jouets, ces modèles sont tous au même prix. Tom constate que : s'il achète 3 dinosaures, il lui restera 15€ mais pour acheter 5 dinosaures, il va lui manquer 11€. Donc est-ce que Tom a assez d'argent pour acheter 4 dinosaures ? Si oui, alors combien d'argent il va lui rester et si non, combien d'argent il va lui manquer ?</p> <p>Donc il faudra bien montrer comment vous avez trouvé votre réponse, bien expliquer. Donc pour l'instant 5 minutes tout seul, pas de bruits, je ne répons à aucune question.</p> <p><i>Manon lève la main.</i></p>
10.	Manon	Mais on peut surligner ou ?
11.	P.	Vous pouvez surligner, vous faites ce que vous voulez.
		[...]
12.	P.	<p>Donc maintenant, on se met en groupe. La table vous pouvez la pousser. Donc on fait une mise en groupe pendant 25 minutes.</p> <p>Chut... J'ai fait en sorte que ça aille très vite. <i>Les élèves se mettent en groupe.</i></p>
13.	Manon	Mais madame faut faire sur une feuille ?
14.	P.	<p>Là vous rédigez sur la feuille... Que je vais vous donner. <i>P distribue la feuille de rédaction.</i></p> <p>C'est chacun son groupe et dans le groupe je veux que tout le monde travaille. Tout le monde va apporter ses idées hein, c'est comme ça que ça avance après dans un groupe.</p>
Zoom sur un groupe 11 :34		
15.	Juliette	Je peux coller la feuille avec le problème sur la feuille ?
16.	P.	<p>Là c'est une rédaction pour tout le monde, donc déjà il faut mettre en commun vos idées hein ! D'accord ?</p> <p><i>Pour l'instant il n'y a pas d'échanges entre les 4 élèves, chacun est en train de poursuivre son raisonnement commencé en phase individuelle.</i></p>

		<p>Mettez en commun vos idées déjà. Hein Victor ! Essayez de travailler ensemble.</p> <p><i>P déplace les troussees afin que chaque élève puisse voir les idées de chacun.</i></p> <p>Victor, ton idée ? Explique aux autres.</p>
17.	Victor	<p>A mon avis, comme pour 3 dinosaures, il reste 15€. Avec 5, il lui manque 11€ et $15 + 5,5 = 20,5$. Donc un dinosaure coûte 20 euros 50.</p>
18.	P.	<p>Pourquoi 5,5 ?</p>
19.	Victor.	<p>Bah parce que, pour en acheter encore 2, il manque 11€ et $11 \div 2 = 5,5$ et après $15 + 5,5$ ça fait 20,5.</p>
20.	P.	<p>Les autres, vous êtes d'accord ? Vous avez compris ? <i>Jean fait signe que non avec la main.</i> Non pas toi Jean ? Juliette ?</p>
21.	Jean	<p>Si j'ai compris mais non ce n'est pas ça.</p>
22.	Juliette	<p>Moi j'ai un peu compris.</p>
23.	Axel	<p>Mais pour être sûrs, on fait l'inverse. $5,5 \times 3$ et $5,5 \times 5$, comme ça ...</p>
24.	P.	<p>Là, il y a une idée de vérification, c'est ça ? Tu veux vérifier ?</p> <p><i>Axel fait oui de la tête.</i></p>
25.	P.	<p><i>Il veut vérifier si la réponse de Victor est juste. (En s'adressant à Juliette et Jean)</i></p> <p>Essayez.... Essayez et ensuite vous verrez, puis Jean il aura peut-être une idée aussi à vous proposer.</p>
26.	Jean	<p>C'est bon ? <i>(En montrant son cahier à P.)</i></p>
27.	P.	<p>Je ne sais pas, moi je ne dis rien en tout cas. Je regarde juste. <i>P s'approche du cahier de Jean.</i> Ça c'est un raisonnement, il faut expliquer ton raisonnement. D'accord ? Il faudra l'expliquer.</p> <p>Donc là on a écouté...</p>
28.	Axel	<p>On prend une feuille ?</p>
29.	P.	<p>C'est à la fin pour la rédaction mais si vous voulez un brouillon, pas de soucis.</p> <p>Donc là on a écouté le discours de Victor qui nous dit qu'un dinosaure c'est... Combien tu nous a dit ?</p>

30.	Victor	20€50.
31.	P.	20€50. Vous la question que vous vous poser, c'est combien coûte un dinosaure, c'est ça ?
32.	Juliette	Oui
33.	Axel	Oui et après on fait fois 3 et fois 5. Et fois 4 et après... <i>Axel relis le problème</i>
34.	Victor	S'il y a encore 2 dinosaures, on fait À quoi que non ?
35.	P.	Je vous laisse, vous avez des idées, essayez de réfléchir. <i>P va voir d'autres groupes</i>
36.	Victor	Je sais, il faut faire 15 + euh 11
37.	Jean	Oui, voilà, c'est ça (<i>en bondissant de sa chaise</i>)
38.	Victor	Égal...
39.	Jean	26. Diviser par 2. 13
40.	Victor	13.
41.	Jean	Donc 1 dinosaure coûte 13€.
42.	P.	Alors Jean, tu leur as expliqué ta méthode ?
43.	Victor	Oui, on a trouvé en fait.
44.	P.	Jean tu peux expliquer ? Allez, tu as ta feuille.
45.	Jean	S'il achète 3 dinosaures, reste 15€.
46.	Les autres élèves du groupe	Oui.
47.	Jean	15€... donc 15€, on continue. Mais pour acheter 5 dinosaures, il lui manque 11€. $15 + 11 = 26$. $26 \div 2$ parce que 26 c'est deux dinosaures.
48.	P.	Oui, 26 c'est deux dinosaures.
49.	Jean	De 3 à 5, ça fait 2.
50.	Juliette	J'ai compris. On fait $15 + 11 = 26$ et $26 \div 2$.
51.	P.	Ah, Axel il demande pourquoi c'est 2 !
52.	Jean	Parce que 1 dinosaure coûte

53.	P.	Je peux comprendre que.... il faut Il faut s’imaginer la chose. Peut-être un schéma peut vous aider. Juliette tu as compris ?
54.	Juliette	Oui
55.	Victor	En gros regarde.... <i>Victor qui est à côté d’Axel essaye de lui faire comprendre en écrivant sur une feuille.</i>
56.	P.	Et les 20€50 de tout à l’heure, vous avez rejeté cette hypothèse ? Les 20€50 ?
57.	Victor	Non, ça ne marche pas.
58.	P.	Pourquoi ?
59.	Victor	Parce que, bah parce que si ... si on pensait que par exemple Diviser par 5 + ... euh + 15. Alors qu’il faut diviser par 4. Du coup ce n’est pas possible. – <i>Passage non audible</i>
<u>Mise en commun</u> 32 :36		
60.	P.	Aller, là ça va être intéressant parce que les groupes vont confronter leur solution. Chut. On va commencer par ce groupe là (<i>en pointant du doigt le groupe désigné</i>). Vous venez s’il vous plait. Je vais prendre votre feuille, on va essayer de la projeter. Chut. Vous pouvez éteindre la lumière ? On ne voit pas très bien alors on va surtout les écouter. Chut. Alors, qui est-ce qui veut commenter ? Mettez-vous là pour que les autres vous voit. Expliquez votre méthode.
61.	Hugo	Bah...
62.	P.	Chut, on écoute
63.	Hugo	Bah ne fait, on a essayé 15×3 , ça faisait 45. Après, on a essayé 15×5 , ça faisait 50.... euh 75. Et moins 11....
64.	P.	Essaye de parler bien fort pour qu’on puisse vous entendre.
65.	Hugo	$75 - 11$, ça fait 64 et ce n’était pas le même résultat donc ce n’était pas ça.
66.	P.	Alors, est-ce que pour le moment vous comprenez leur méthode ?
67.	Elèves	Non. Pas du tout. Pas trop.

68.	P.	Est-ce que déjà de base, vous pouvez expliquer votre méthode avant de vous lancer ? Qu'est-ce que vous vous êtes dit dans votre tête ?
69.	Angelina	Bah on s'est dit qu'il fallait faire fois 3 plus 15. Quelque chose fois 3 plus 15 et euh quelque chose fois 5 moins 11. Et il fallait que ça fasse le même résultat sinon ça ne marchait pas.
70.	P.	Alors là est-ce que vous êtes d'accord ?
71.	Un élève	Oui
72.	P.	Donc effectivement, on nous dit, on nous donne 2 constatations : s'il en achète 3, il lui reste 15. S'il en achète 5 par contre il lui manque 11. Donc, leur idée, ça a été de prendre un nombre, de le multiplier par 3, d'ajouter 15 et de voir si en prenant le même nombre mais en le multipliant par 5 en enlevant 11, ils obtenaient le même résultat. Puisque le prix de 3 dinosaures augmenté de 15, c'est la même chose que le prix de 5 dinosaures diminué de 11.
73.	Un élève	Je n'ai pas compris.
74.	P.	C'est une méthode à tâtons, ils ont essayé des choses. Ils ont essayé que le prix du dinosaure correspond bien aux deux critères. Allez-y, continuez.
75.	Angelina	Donc 15×3 ça fait 45 et $45 + 15$ ça faisait 60. Et après on a essayé fois 5. Donc 15×5 , ça fait 75 et $75 - 11$, ça fait 64. Donc comme il y avait 60 et 64, ce n'était pas pareil.
76.	P.	Oui
77.	Angelina	Donc ça ne pouvait pas être ça.
78.	P.	D'accord. Ensuite ?
79.	Hugo	On a essayé 14×3 . Ça fait 42, et ensuite $42 + 15$, ça fait 57.
80.	P.	Hmm... <i>Quelqu'un frappe à la porte.</i> Allez-y continuez hein.
81.	Hugo	Euh, après on a fait 14×5 , ça fait 70 et $70 - 11$ ça faisait 59. Ce n'est toujours pas pareil donc ce n'est pas ça.

82.	P.	Ecoutez bien, parce que là c'est important.
83.	Angelina	Après on a essayé 13×3 ça faisait 39, euh $39 + 15$, ça faisait 54 et 13×5 c'est 65 et $65 - 11$ c'était égal à 54. Donc euh comme c'est 54 et 54, euh... ça marchait.
84.	P.	D'accord, donc quelle est la réponse au problème posé ?
85.	Angelina	Euh, 13. On a fait 13×4 , ça fait 52. Ça faisait 52, 13×4 et du coup, oui il en avait assez, et il en avait même, il avait même 2€ en plus.
86.	P.	D'accord.
87.	Elena	Donc il pourra s'acheter une glace !
88.	P.	Donc vous avez trouvé le prix d'un dinosaure qui valait 13€, vous l'avez multiplié par 4 pour savoir combien ça faisait. Et du coup vous avez trouvé qu'il lui restait 2€. Donc c'est une méthode qui fonctionne. Ensuite, je voulais faire passer, euh, ce groupe-là. Chacun votre tour, on va essayer de faire passer tout le monde. Chuut (<i>P en train de projeter la feuille au tableau</i>) peut importe qui est-ce qui a écrit. Voilà, on vous écoute.
89.	Victor	Bah, nous on a essayé de trouver combien faisait.... enfin c'était quoi le prix d'un dinosaure.
90.	P.	Chut
91.	Victor	Euh, bah on a fait $13 + 11$, ça fait 26. Ah oui, $15 + 11$ ça fait 26. Diviser par 2, ça fait 13. Bah euh on a trouvé que 13 c'était le
92.	P.	Alors, vous pouvez juste expliquer pourquoi vous avez fait, euh, $15 + 11$?
93.	Juliette	Parce que, on voulait trouver le prix d'un dinosaure.
94.	P.	Vous voulez trouver le prix d'un dinosaure, donc ? Pourquoi avoir fait $15 + 11$?
95.	Juliette	On a fait 26 divisé par 2, le résultat divisé par 2, ça fait 13. Et 13 c'est le prix d'un dinosaure.
96.	Victor	Et 13 c'est inférieur à 15 donc il pourra s'acheter un autre dinosaure.

97.	P.	13 inférieur... ?
98.	Un élève	C'est plus petit.
99.	P.	Plus petit que, oui. 13 est plus petit que 15 donc il pourra acheter un quatrième dinosaure et vous avez trouvé même qu'il lui restait...
100.	Le groupe	2€.
101.	P.	D'accord, moi je reviens juste sur : d'où vient votre 26 ?
102.	Juliette	15 + 11.
103.	P.	Vous pouvez m'expliquer cette méthode ? Pourquoi 15 + 11 ? Jean tu avais expliqué tout à l'heure, est-ce que tu peux expliquer ? Tu l'avais bien fait ! <i>Jean hésitant.</i> Tu veux reprendre un problème ? Tu te rappelles le problème ? <i>Jean dit oui de la tête.</i> Tu veux essayer ou pas ? Oui ? Non ? Je n'entends pas.
104.	Jean	Oui
105.	P.	Oui ? Aller, vas-y !
106.	Jean	15 15 c'est 3 dinosaures et 5 dinosaures, il manquera 11€
107.	P.	Oui
108.	Jean	Donc si tu fais 15 + 11, ça fait 26, ça fera 2 dinosaures. De 3 à 5, ça fait 2.
109.	P.	De 3 à 5, ça fait 2, d'accord et donc du coup 2 dinosaures, ça fera 26€.
110.	Jean	Oui.
111.	P.	C'est ça !
112.	Jean	Et $26 \div 2 = 13$
113.	P.	Manon, une question.
114.	Manon	Euh non c'est pour passer après.
115.	P.	C'est bon pour tout le monde cette méthode ?
116.	Elèves	Oui
117.	P.	Très bien, ensuite, euh... on essaye de faire passer tout le monde de toute façon. Le groupe là-bas. Chut. Non non mais on fait passer tous les groupes donc ça veut dire qu'on s'écoute les uns des autres ! Sinon ça ne sert à rien.

118.	Kellyan	Arrête de bouger la table !
119.	P.	Et, Kelyann ! <i>P allant vers Kelyann.</i> Voilà, elle est mise, on en parle plus ! Attention, je vous surveille. Aller, on y va !
120.	Thibaut	On a fait $15 + 11$, ça fait 26. Et..... bah comme euh 3 dinosaures, il reste 15€.
121.	P.	3 dinosaures, il lui reste 15. Oui.
122.	Thibaut	Et il lui manquera 11€ s'il veut acheter 5 dinosaures.
123.	P.	Oui.
124.	Thibaut	Donc euh..... on a essayé de trouver le prix de 2 dinosaures.
125.	P.	Vous êtes passés par le prix de 2 dinosaures, oui.
126.	Thibaut	On a trouvé 26€.
127.	Clémence	On a fait 26 divisé par 42 égal euh...
128.	P.	26 divisé par ?
129.	Clémence	42
130.	P.	Il sort d'où ce 42 ? [...] Alors ?
131.	Thibaut	On a fait 26 divisé par 2, on a trouvé 13. Donc euh... comme 1 c'est la moitié de 2, on sait qu'il fallait faire 26 divisé par 2, ça fait 13. Du coup, bah c'est le prix d'un dinosaure. Ensuite, 3 dinosaures, on fait $26 + 13$, ça fait 39 et puis pour 4 dinosaures, ça fait $39 + 13 = 52$. Du coup 4 dinosaures, ça fait 52€ et il lui restera 2€.
132.	P.	Donc 4 dinosaures ça fait 52€ et il lui restera 2€, c'est ça ? Parce qu'il a combien ? Parce qu'il a 54€. Donc ça rejoint, c'est la même méthode que le groupe d'avant, c'est ça en fait ?
133.	Le groupe	Oui.
134.	P.	Bon, un autre groupe. C'est la même méthode ? Si c'est la même méthode ce n'est pas la peine. D'autres groupes ?
135.	Manon	Nous C'est la même méthode mais on a pas pensé pareil.....
136.	P.	Allez-y, expliquez-nous, essayez de bien nous expliquer votre raisonnement.

137.	Manon	Euh en fait...
138.	P.	Chut, on n'entend pas d'ici.
139.	Manon	Bah quand on a trouvé le résultat 26, euh... on se demandait.... euh <i>Manon va chercher son problème.</i> En fait, de toute façon le prix des 2 dinosaures devait être plus que 15€ parce que, il lui restait 15€ et pour en acheter 2, bah il lui manque 11€.
140.	P.	D'accord.
141.	Manon	Bah du coup, pour trouver, en fait, on a pris les 15€ et on a pris 11€ parce que c'est ce qu'il manquait. Donc on a pris le prix qui manquait plus le prix qu'il avait déjà et on a trouvé 26. Et vu que c'était le prix des 2 dinosaures bah on a divisé par 2 et ça faisait 13.
142.	P.	Et après, vous êtes revenus à la même méthode.
143.	Manon	Oui
144.	P.	D'accord, donc là c'est vrai que c'est expliqué un peu différemment parce qu'en fait vous voyez que pour acheter 3, il lui manque, euh, il lui reste 15 et pour en acheter 5, il lui manque 11. Ça veut dire que pour en acheter 2 de plus, bah il utilise les 15€ qu'il lui restait mais il lui manquerait encore 11€. Donc le prix de 2, ça serait alors 15€ + 11€. C'est votre raisonnement. Qui nous donne 26 et ensuite on trouve le prix d'un dinosaure. Donc en fait tout le monde est passé par : trouver le prix d'un dinosaure. <i>Angéline lève la main</i> Oui Angéline ?
145.	Angelina	Mais pourquoi elle ne fait pas 26 fois 2 directement ?
146.	Manon	Pourquoi 26 fois 2 ?
147.	Angelina	Bah on peut faire 26 fois 2 directement ! Parce que 26 c'est le prix de 2 dinosaures.
148.	P.	Ah, ça c'est bien ! On a 26 c'est 2 dinosaures donc Angelina je te laisse expliquer la suite ! C'est intéressant ! Chut
149.	Angelina	Bah 26 c'est 2 dinosaures donc 2 bah fois 2 ça fait 4 donc 26 fois 2 ça fait 52. Donc on pouvait trouver plus rapidement.
150.	P.	Donc elle a trouvé que 4 dinosaures valaient 52€. Mais est-ce que du coup il lui manque ou il lui restera de l'argent ? Comment vous

		allez faire ? Parce que là d'accord on sait que 4 dinosaures vont couter 52€ mais comment vous savez s'il lui reste ou pas de l'argent en passant par la méthode d'Angelina ? Oui Matéo.
151.	Matéo	Bah s'il y a 11€ et qu'il en reste 3. 13 ça fera le prix d'un autre dinosaure.
152.	P.	Donc tu repasses par le prix d'un dinosaure ?
153.	Angelina	Après on peut fait 52 divisé par 4.
154.	P.	Oui, vous pouvez faire 52 divisé par 4 et vous retombez sur le prix d'un dinosaure. Donc ... En résumé, une méthode similaire mais peut-être plus simple à suivre, à comprendre. Merci. Euh.... ce groupe passe. Allez-y
155.	Lolita	Bah, on a fait 15 + 11, ça fait 26, euh ensuite on a divisé 26.... par 2.
156.	P.	Alors pourquoi ?
157.	Le groupe	Euh....
158.	P.	Expliquez-nous pourquoi !
159.	Fanny	26 c'est le prix de 2 dinosaures donc pour 1 dinosaure on divise par 2.
160.	P.	Donc vous trouvez 13€. Ensuite ce qui m'intéresse c'est comment vous avez fait pour savoir s'il lui restait ou non de l'argent ? En sachant que 1 valait 13.
161.	Fanny	Bah parce que 1 valait 13 donc si on enlevait 11... parce qu'il lui manquait 11 pour acheter un dinosaure.
162.	P.	Donc vous, vous êtes parties de la deuxième constatation : pour en acheter 5, il lui manque 11. Ça veut dire que du coup vous avez fait 13 – 11 pour savoir combien il lui restait ? <i>Le groupe est hésitant à ce moment.</i>
163.	Léna	Oui c'est ça.
164.	Romane	Pour vérifier si c'était vraiment 13, on a fait 15 moins 13 égal 2 et 2 plus 11 égal 13.
165.	P.	Donc vous retombez bien sur la même chose donc c'était bien 2€ qu'il lui manquait et 13€ le prix d'un dinosaure.

		Allez le dernier groupe ! Allez-y ! Qui se lance ?
166.	Emile	Et bah on a fait $15 + 11$, ça nous donne 26. Et après on a divisé par 2, ça a fait 13, c'est le prix d'un seul dinosaure et après du coup 13 pour aller à 15, il reste 2 et c'est le nombre d'argent qu'il restait. Et c'est 2, voilà.
167.	P.	D'accord, donc tout le monde ou presque tout le monde a trouvé le prix de 2 dinosaures pour ensuite trouver le prix d'un dinosaure mais ensuite vous avez vu, il y a eu plusieurs méthodes pour répondre finalement à la question. Chut. Le groupe qui est passé juste avant a utilisé le deuxième tiret avec l'information qu'il lui manquait 11€, vous, vous avez utilisé l'information : quand il en achète 3, il lui reste 15 donc vous vous êtes dit : puisque 1 dinosaure coûte 13€, il peut en acheter un <i>deuxième</i> puisqu'il lui restait 15€. Donc l'argent qu'il lui restait moins le prix d'un dinosaure, on conclut qu'il lui reste 2€.

Annexe 4 : Production du groupe 1

Il a assez il a même 2€ de plus.

On a essayé $15 \times 3 = 45$ et $45 + 15 = 60$
 $15 \times 5 = 75$ $75 - 11 = 64$ comme ce n'est pas
pareil ce n'est pas ça.

On a essayé $14 \times 3 = 42$ et $42 + 15 = 57$
 $14 \times 5 = 70$ $70 - 11 = 59$ comme ce
n'est pas pareil ce n'est pas ça.

On a essayé $13 \times 3 = 39$ $39 + 15 = 54$
 $13 \times 5 = 65$ $65 - 11 = 54$ comme c'est
pareil ça ne marche pas.

Donc pour trouver le prix de 4 dinosaures on
a fait

$13 \times 4 = 52$ donc c'est même moins que
ce qu'il a dans son porte-monnaie vu qu'
~~on~~ a 54€ il lui reste même 2€
(pour s'acheter une glace par exemple)

Annexe 5 : Production du groupe 2

Juliette, Axel, Victor, Jean

Trois, quatre, ou cinq dinosaures ?

- s'il achète trois dinosaures, il lui restera 15€
- Mais pour acheter cinq dinosaures, il lui manque 11€

$15 + 11 = 26$ (on peut acheter deux dinosaures ?)

$26 : 2 = 13$ (13 = le prix d'un dinosaure)

$$15 - 13 = 2$$

Tom pourrait acheter encore un dinosaure et il lui restera 2€.

Résumé :

Au sein d'un cours de mathématiques se déroule différentes actions qui sont menées à la fois par le professeur et les élèves. Que se passe-t-il dans la classe lors des situations d'enseignement ? Comment les acteurs de la classe s'organisent pour acquérir de nouvelles connaissances ? Quel est le contrat entre l'enseignant et les élèves ? Y a-t-il des limites à ce contrat ? Comment évoluer au sein du milieu didactique ?

Ce mémoire vise à apporter des éléments de réponses à ses questions. Il décrira et analysera les comportements des élèves et de l'enseignant lors de la résolution d'un problème mathématiques en s'appuyant sur deux concepts importants : le contrat didactique et le milieu didactique qui ont été introduits par Guy Brousseau (1998).

Mots-clés : problèmes mathématiques, contrat didactique, milieu didactique.